Elektrodynamik

WS 1998/99

W. Cassing
Institut für Theoretische Physik
Universität Giessen

Inhaltsverzeichnis

0.1 Elektrische Ladung . . . 3
0.2 Elektrostatik . . . 3
0.3 Magnetostatik . . . 4
0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes . . . 4
0.5 Maxwell'sche Gleichungen . . . 5
0.6 Materie im elektromagnetischen Feld . . . 5

I Elektrostatik **7**

1 Coulomb'sches Gesetz **8**
1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz . . . 8
1.2 Coulomb-Kraft . . . 9
1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen . . . 10
1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen . . . 11
1.5 Multipolentwicklung . . . 12

2 Grundlagen der Elektrostatik **16**
2.1 Fluß eines Vektor-Feldes . . . 16
2.2 Satz von Gauß . . . 16
2.3 Anwendungen des Gauß'schen Satzes . . . 18
2.4 Differentialgleichungen für $\mathbf{E}$ und Φ . . . 19
2.5 Energie des elektrostatischen Feldes . . . 20
2.6 Multipole im elektrischen Feld . . . 22

3 Randwertprobleme der Elektrostatik **23**
3.1 Eindeutigkeitstheorem . . . 23
3.2 Spiegelungsmethode . . . 24
3.3 Inversionsmethode . . . 25
3.4 Trennung der Variablen . . . 27

II Magnetostatik **29**

4 Ampère'sches Gesetz **30**
4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung . . . 30
4.2 Ampère'sches Gesetz . . . 32

4.3 Formel von Biot-Savart . . . 33
4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld . . . 34
4.5 Kräfte zwischen Strömen . . . 36

5 Grundgleichungen der Magnetostatik 37
5.1 Divergenz der magnetischen Induktion . . . 37
5.2 Rotation von **B** . . . 38
5.3 Vektor-Potential . . . 39
5.4 Multipolentwicklung . . . 40
5.5 Energie eines Dipols im äußeren Magnetfeld . . . 42

III Grundlagen der Elektrodynamik 43

6 Die Maxwell'schen Gleichungen 44
6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes . . . 44
6.2 Faraday'sches Induktionsgesetz . . . 44
6.3 Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes . . . 47
6.4 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen . . . 48
6.5 Selbstinduktion . . . 48

7 Die elektromagnetischen Potentiale 49
7.1 Skalares Potential und Vektorpotential . . . 49
7.2 Lorentz-Konvention . . . 50
7.3 Coulomb-Eichung . . . 51
7.4 Induktionsgesetz, Selbstinduktion . . . 52

8 Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes 53
8.1 Energie . . . 53
8.2 Impuls . . . 55
8.3 Drehimpuls . . . 57
8.4 Zusammenfassung . . . 57

IV Elektromagnetische Strahlung 58

9 Das elektromagnetische Feld im Vakuum 59
9.1 Homogene Wellengleichungen . . . 59
9.2 Ebene Wellen . . . 60
9.3 Monochromatische ebene Wellen . . . 61
9.4 Polarisation . . . 64

10 Wellenpakete im Vakuum 66
10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen . . . 66
10.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale . . . 67
10.3 Spektrale Zerlegung ebener Wellen . . . 68

10.4 δ-Distribution 69
10.5 Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung; Wellenpakete 70

11 Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen 73
11.1 Problemstellung 73
11.2 Konstruktion von G 74
11.3 Retardierte Potentiale 76
11.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen 78

12 Multipolstrahlung 81
12.1 Langwellen-Näherung 81
12.2 Elektrische Dipol - Strahlung 82
12.3 Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupol - Strahlung 84

13 Systematik der Multipolentwicklung 88
13.1 Multipolentwicklung statischer Felder 88
13.2 Allgemeine Eigenschaften der Kugelfunktionen 90
13.3 Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes 92
13.4 Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen 94
13.5 Nutzen der Entwicklung nach Kugelfunktionen 95

V Das elektromagnetische Feld in Materie 96

14 Makroskopische Felder 97
14.1 Makroskopische Mittelwerte 97
14.2 Freie und gebundene Ladungsträger 98
14.3 Polarisation und Magnetisierung 101

15 Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes 103
15.1 Energie 103
15.2 Impuls, Drehimpuls 104
15.3 Die Kirchhoff'schen Regeln 105

16 Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie 107
16.1 Materialgleichungen 107
16.2 Ohm'sches Gesetz; elektrische Leitfähigkeit 108
16.3 Dielektrika 109
16.4 Para- und Diamagnetismus 110
16.5 Temperaturabhängigkeit der Polarisation 112

17 Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen 114
17.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen 114
17.2 Lineare, isotrope Medien 116
17.3 Reflexion und Brechung von Licht 117
17.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden Materialien 119

VI Relativistische Formulierung der Elektrodynamik 121

18 Kovarianz der Elektrodynamik 122
18.1 Lorentz-Gruppe . . . 122
18.2 Lorentz-Gruppe (Vierer-Tensoren) . . . 124
18.3 Viererstromdichte . . . 126
18.4 Vierer-Potential . . . 127
18.5 Ebene Wellen . . . 128
18.6 Transformation der Felder **E** und **B** . . . 129
18.7 Das Coulomb-Feld . . . 130

19 Relativistische Mechanik 132
19.1 Impuls und Energie . . . 132
19.2 Stoßprobleme . . . 135
19.3 Bewegungsgleichungen . . . 136
19.4 Lorentz-Transformation der Kraft . . . 138
19.5 Lorentz-Kraft . . . 138

Einführung in die Elektrodynamik

0.1 Elektrische Ladung

Während in der Mechanik die Eigenschaft *Masse* im Vordergrund steht, ist die *Ladung* von Massenpunkten Ausgangspunkt der Elektrodynamik. Sie besitzt eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften, die durch vielfältige experimentelle Messungen gesichert sind:
1.) Es gibt 2 Sorten von **Ladungen**: positive und negative. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen sich an.
2.) Die Gesamtladung eines Systems von Massenpunkten ist die algebraische Summe der Einzelladungen; die Ladung ist ein **Skalar**.
3.) Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems ist konstant und ihr Zahlenwert unabhängig vom Bewegungszustand des Systems.
4.) Ladung kommt nur als Vielfaches einer **Elementarladung** e (eines Elektrons) vor,

$$q = ne;\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Klassischer Nachweis für diese **Quantisierung** der Ladung ist der **Millikan-Versuch**. Den Elementarteilchen *Quarks* ordnet man zwar drittelzahlige Ladungen zu, d.h. $q = \pm 1/3e$ bzw. $q = \pm 2/3e$, jedoch sind diese *Quarks* im uns hier interessierenden Energiebereich nicht als freie Teilchen beobachtbar.

0.2 Elektrostatik

Das einfachste Problem der Elektrodynamik ist der Fall ruhender Ladungen, den wir mit **Elektrostatik** bezeichnen. Bringt man in die Umgebung einer (oder mehrerer) räumlich fixierter Punktladungen eine *Probeladung* q, so wirkt auf diese Probeladung eine Kraft $\mathbf{K}$, welche im allgemeinen vom Ort $\mathbf{r}$ der Probeladung abhängt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}).$$

Ersetzt man q durch eine andere Probeladung q', so findet man für die auf q' wirkende Kraft $\mathbf{K}'$:

$$\mathbf{K}'/q' = \mathbf{K}/q.$$

Diese Erfahrung legt es nahe, den Begriff des **elektrischen Feldes**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q}\mathbf{K}(\mathbf{r})$$

einzuführen. Dieses von den ruhenden Punktladungen erzeugte Feld ordnet jedem Raumpunkt $\mathbf{r}$ ein Tripel reeller Zahlen zu, welches sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe der Elektrostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang von Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ und elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zu finden und daraus bei gegebener Ladungsverteilung (z.B. einer homogenen räumlichen Kugel) das Feld zu berechnen.

0.3 Magnetostatik

Bewegte Ladungen in Form stationärer Ströme sind der Ursprung magnetostatischer Felder, die wir in Analogie zu den elektrostatischen Feldern einführen wollen. Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Bringt man in die Umgebung eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters eine Probeladung q, so kann die auf q am Ort $\mathbf{r}$ wirkende Kraft geschrieben werden als

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})).$$

Dabei ist $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit der Probeladung und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein (von $\mathbf{v}$ unabhängiges) Vektorfeld, hervorgerufen durch den vorgegebenen stationären Strom.

Aufgabe der Magnetostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang zwischen einer stationären Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und dem magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zu finden und daraus bei gegebener Stromverteilung (z.B. für einen stationären Kreisstrom) das Feld zu berechnen.

0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Nach den bisherigen Ausführungen könnte der Eindruck entstehen, als seien das elektrische und das magnetische Feld von einander unabhängige Größen. Daß dies nicht der Fall ist, zeigen folgende einfache Überlegungen:

1.) Wenn eine Punktladung Q in einem Inertialsystem Σ ruht, so mißt (über die auf eine Probeladung q wirkende Kraft) ein Beobachter in Σ ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \neq 0$, jedoch kein Magnetfeld. Für einen anderen Beobachter in einem gegenüber Σ bewegten Inertialsystem Σ' ist die Ladung bewegt. Der Beobachter in Σ' mißt daher sowohl ein elektrisches Feld $\mathbf{E}' \neq 0$ als auch ein magnetisches Feld $\mathbf{B}' \neq 0$. Die Wechselwirkung zwischen der betrachteten Ladung und einer Probeladung q würde also von einem Beobachter in Σ als *rein elektrische* Wechselwirkung (vermittelt durch das Feld $\mathbf{E}$) beschrieben, während ein Beobachter in Σ' sowohl *elektrische* als auch *magnetische* Wechselwirkung feststellen würde (vermittelt durch die Felder $\mathbf{E}'$ und $\mathbf{B}'$). Diese Betrachtung zeigt, daß man elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit ansehen muß, als **elektromagnetisches** Feld.

Anmerkung: Für den in 0.3 diskutierten Fall eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters tritt kein elektrisches Feld auf, da bei einem stationären Strom im Leiter kein *Ladungsstau* auftritt, so daß sich die im Leiter befindlichen positiven und negativen Ladungsträger (Gitterbausteine und Leitungselektronen) nach außen hin kompensieren.

2.) Die wechselseitige Abhängigkeit von elektrischem und magnetischem Feld tritt unvermeidbar dann zu Tage, wenn wir beliebige Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ zulassen. Die Forderung der Ladungserhaltung ergibt dann eine Verknüpfung von ρ und $\mathbf{j}$, da die Ladung in einem bestimmten Volumen V nur ab(zu)-nehmen kann, indem ein entsprechender Strom durch die Oberfläche von V hinaus(hinein)-fließt. Dann können aber $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden.

0.5 Maxwell'sche Gleichungen

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und den Ladungen (den *Quellen* des elektromagnetischen Feldes) beschreiben die **Maxwell-Gleichungen**. Folgende Aufgabe ergibt sich:
1.) die Maxwell-Gleichungen zu formulieren und experimentell zu begründen,
2.) ihre Invarianzeigenschaften zu untersuchen, woraus sich direkt der Zugang zur speziellen Relativitätstheorie ergibt. Die Untersuchung wird zeigen, daß der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen durch eine **Lorentz-Transformation** beschrieben werden muß, d.h. für alle Inertialbeobachter die *gleiche Physik gilt.*
3.) Energie-, Impuls- und Drehimpuls-Bilanz für ein System geladener Massenpunkte im elektromagnetischen Feld werden dazu führen, dem elektromagnetischen Feld Energie, Impuls und Drehimpuls zuzuordnen. Daraus werden sich dann Begriffe wie **Strahlungsdruck** und die Einführung von **Photonen** ergeben.
4.) Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen. Beispiele sind die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen oder die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols.

0.6 Materie im elektromagnetischen Feld

Die Maxwell-Gleichungen bestimmen im Prinzip die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ vollständig, wenn die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r},t)$ und die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ bekannt sind. In der Praxis treten dabei folgende Probleme auf:
1.) Für ein System von N geladenen Massenpunkten müßte man die Newton'schen Bewegungsgleichungen lösen, um $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ **mikroskopisch** berechnen zu können. Für ein Stück Materie von **makroskopischen** Dimensionen (z.B. das Dielektrikum zwischen den Platten eines Kondensators oder dem Eisenkern einer stromdurchflossenen Spule) haben wir es mit $10^{20} - 10^{25}$ Massenpunkten zu tun!
2.) Die mikroskopisch berechneten Funktionen $\rho(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ werden im allgemeinen starke Schwankungen über kleine räumliche und zeitliche Distanzen aufweisen. Die Lösung von Maxwell-Gleichungen (mehrdimensionale Integrationen) wäre dann praktisch nicht durchführbar bzw. unökonomisch!

Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet der folgende Kompromiß: Wir verzichten auf die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes in mikroskopischen Dimensionen (Volumina von $10^{-24} cm^3$, Zeiten von $10^{-8} sec$) und geben uns mit Mittelwerten (10^{-6} $\mathrm{cm}^3, 10^{-3} sec$) zufrieden. Anstelle von $\rho(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ treten dann Mittelwerte der Form

$$< \rho(\mathbf{r},t) >= \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int d\xi d\tau \; \rho(\mathbf{r}+\xi, t+\tau)$$

und entsprechend für $< \mathbf{j}(\mathbf{r},t) >$, $< \mathbf{E}(\mathbf{r},t) >$ und $< \mathbf{B}(\mathbf{r},t) >$. Aus den Maxwell-Gleichungen der mikroskopischen Felder ergeben sich dann Gleichungen ähnlicher Struktur für das makroskopische elektromagnetische Feld. Die darin auftretenden Verteilungen $< \rho >$ und $< \mathbf{j} >$ werden dann durch den experimentellen Aufbau definiert bzw. *eingestellt.*

Es hat sich in diesem Zusammenhang als zweckmäßig erwiesen, zu den Mittelwerten der *fundamentalen* Felder, der **elektrischen Feldstärke E** und der **magnetischen Induktion B**, noch zwei weitere Vektorfelder als Hilfsgrößen einzuführen: die **dielektrische Verschiebung D** und die **magnetische Feldstärke H**. Die dann zusätzlich benötigten Bestimmungsgleichungen gewinnt man durch Annahme eines linearen Zusammenhanges von **E** und **D** bzw. **B** und **H**, charakterisiert durch die **Dielektrizitätskonstante** ϵ und die **Permeabilität** μ. Häufig ist die makroskopische Stromverteilung nicht von außen vorgebbar, sondern noch von den zu berechnenden Feldern abhängig. Im einfachsten Fall (Ohm'sches Gesetz) setzt man einen linearen Zusammenhang zwischen makroskopischem Strom und elektrischer Feldstärke an, womit (als Proportionalitätskonstante) eine weitere Materialkonstante ins Spiel kommt: die **elektrische Leitfähigkeit** σ. Die Berechnung dieser Materialkonstanten (ϵ, μ, σ) aus der atomaren Struktur der Materie gehört in den Bereich der Atom- und Festkörperphysik und benutzt Methoden der statistischen Mechanik.

Damit ergeben sich folgende **Aufgabenstellungen**:
1.) Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Maxwell-Gleichungen.
2.) Einführung von Materialkonstanten und ihre Berechnung aus der atomaren Struktur der Materie für einfache Modelle.
3.) Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien. Beispiel: Das Reflexions- und Brechungs-Gesetz der Optik.

Teil I

Elektrostatik

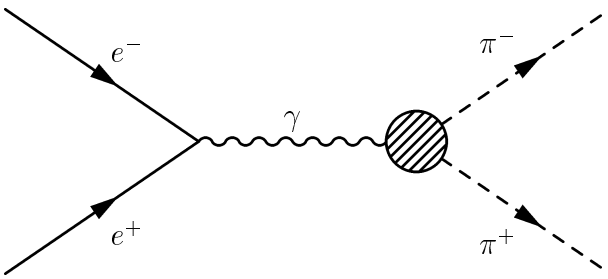
Kapitel 1

Coulomb'sches Gesetz

1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz

In der Einführung hatten wir die grundlegenden Eigenschaften der elektrischen Ladung kurz zusammengestellt. Zur experimentellen Prüfung dieser Eigenschaften benötigt man zunächst eine Meßvorschrift für **Ladung**. Eine solche Meßvorschrift wird im nächsten Unterkapitel nachgeliefert. Zuvor noch einige Ergänzungen zur Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz.

Besonders eindrucksvolle Beweise für die Ladungserhaltung sind die Paar-Erzeugung und Paar-Vernichtung. So zerstrahlen z.B. ein Elektron (e^-) und ein Positron (e^+) in ein hochenergetisches *massives* Photon (γ-Quant), welches ungeladen ist; umgekehrt entsteht bei der Paar-Erzeugung (z.B. in π^+, π^- Mesonen) stets gleich viel positive wie negative Ladung.



$$+e + (-e) = 0 \qquad q = 0 \qquad + e + (-e) = 0$$

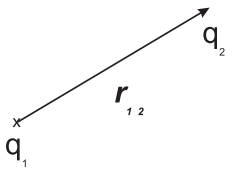
Die Ladungsinvarianz zeigt sich z.B. darin, daß Atome und Moleküle neutral sind, obwohl der Bewegungszustand von Photonen und Elektronen sehr unterschiedlich ist. Besonders klar ist das Beispiel des Helium-Atoms (^4He) und des Deuterium-Moleküls (D_2). Beide bestehen aus 2 Protonen und 2 Neutronen sowie 2 Elektronen und sind damit elektrisch neutral, obwohl der Bewegungszustand der Protonen im Kern des Helium-Atoms und des D_2-Moleküls sehr verschieden sind: das Verhältnis der kinetischen Energien ist etwa 10^6, der mittlere Abstand der Protonen im D_2-Molekül in der Größenordnung von 10^{-8} cm, im He-Kern von 10^{-13} cm.

1.2 Coulomb-Kraft

Als experimentell gesicherte Grundlage für die Elektrostatik benutzen wir das **Coulomb'sche** Kraftgesetz zwischen 2 Punktladungen:

$$\mathbf{K}_{12} = \Gamma_e \, \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \, \mathbf{r}_{12} \tag{1.1}$$

ist die von Ladung q_1 auf Ladung q_2 ausgeübte Kraft.



Eigenschaften:
1.) Anziehung (Abstoßung) für ungleichenamige (gleichnamige) Ladungen.
2.) $\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21}$: Actio = Reactio; also ist der Impuls der beiden Teilchen erhalten.
3.) Zentralkraft: da eine Punktladung (beschrieben durch die skalaren Größen m, q) im Raum keine Richtung auszeichnet. ($\rightarrow$ Drehimpulserhaltung)
Anmerkung: Für (schnell) bewegte Ladungen gilt (1.1) nicht mehr. Das elektromagnetische Feld ist dann in die Impuls- und Drehimpulsbilanz einzubeziehen.

Gleichung (1.1) ist zu ergänzen durch das **Superpositionsprinzip**:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{31} \tag{1.2}$$

für die von 2 Punktladungen q_2 und q_3 auf q_1 ausgeübte Kraft.

Meßvorschrift für Ladung:

Vergleicht man 2 Ladungen q, q' an Hand der von einer festen Ladung Q auf sie ausgeübten Kraft, so findet man für Punktladungen gemäß (1.1):

$$\frac{q}{q'} = \frac{K}{K'}. \tag{1.3}$$

Damit sind Ladungsverhältnisse durch Kraftmessung zu bestimmen: Nach Wahl einer **Einheitsladung** (Ladung des Elektrons oder Positrons) können wir Ladungen relativ zu dieser Einheitsladung messen.

Maßsysteme:

Für die Festlegung der Proportionalitätskonstanten Γ_e gibt es 2 Möglichkeiten:
i) Gauß'sches **cgs**-System: Hier wählt man Γ_e als dimensionslose Konstante; speziell

$$\Gamma_e = 1, \tag{1.4}$$

dann ist über (1.1) die Dimension der Ladung bestimmt zu

$$[q] = [\text{ Kraft}]^{1/2}[\text{Länge}] = \text{ dyn}^{1/2} \times \text{ cm}. \tag{1.5}$$

Die elektrostatische Einheit ist dann diejenige Ladung, die auf eine gleich große im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt. Dieses System wird in der Grundlagenphysik bevorzugt. In der angewandten Elektrodynamik (Elektrotechnik) hat sich das
ii) **MKSA** - System
durchgesetzt, in dem zusätzlich zu den mechanischen Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) noch die Ladungseinheit **Coulomb** = Ampère-Sekunde auftritt. Dabei ist 1 Ampère der elektrische Strom, der aus einer Silbernitratlösung pro Sekunde 1.118 mg Silber abscheidet. Schreibt man

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \tag{1.6}$$

so nimmt die Konstante ϵ_0 den Wert

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{ Meter}^2} \tag{1.7}$$

an.

1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen

Die von N ruhenden Punktladungen q_i an der Orten $\mathbf{r}_i$ auf eine Probeladung q am Ort $\mathbf{r}$ ausgeübte Kraft ist nach (1.1) und (1.2):

$$\mathbf{K} = q\Gamma_e \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{1.8}$$

wobei wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \tag{1.9}$$

als (statisches) **elektrisches Feld** bezeichnen, welches von den Punktladungen q_i am Ort $\mathbf{r}$ erzeugt wird. Es ist gemäß (1.8) ein Vektorfeld, da q ein Skalar ist. Bei vorgegebener Ladung q zeigt (1.8), wie man ein elektrisches Feld messen kann. Dabei ist darauf zu achten, daß die Probeladung so klein ist, daß man ihren Einfluß auf das auszumessende Feld vernachlässigen kann.

Analog dem Fall der Gravitationstheorie in der Mechanik kann man die Vektor-Funktion $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem **elektrischen Potential**

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \tag{1.10}$$

einer skalaren Funktion, durch Differentiation gewinnen:

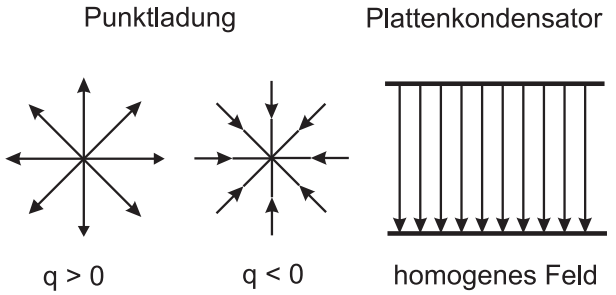
$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \tag{1.11}$$

Die (potentielle) Energie der ruhenden Massenpunkte mit den Ladungen q_i ist dann

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \Phi(\mathbf{r}_i), \tag{1.12}$$

wobei $\Phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort $\mathbf{r}_i$ ist, welches die Ladungen dort erzeugen. Bemerkung: In (1.12) muß strenggenommen die *Selbstenergie* für $i = j$ im rechten Ausdruck wieder abgezogen werden.

Beispiele:



1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen

Wir ersetzen

$$\sum_i q_i \;.... \rightarrow \int dV \rho(\mathbf{r}) \;... \tag{1.13}$$

mit der Normierung

$$Q = \sum_i q_i = \int dV \rho(\mathbf{r}). \tag{1.14}$$

Damit tritt anstelle von (1.9), (1.10), (1.12):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV' \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{1.15}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dV' \rho(\mathbf{r}')\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.16}$$

und

$$U = \frac{1}{2}\int dV \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \tag{1.17}$$

Beispiel: homogen geladene Kugel

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \qquad \text{für} \qquad |\mathbf{r}| \leq R; \qquad \rho(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{sonst.} \tag{1.18}$$

Die Integration in (1.16) ergibt (ÜB):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}|} \quad \text{für} \quad r \geq R; \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6}) \quad \text{für} \quad r \leq R \tag{1.19}$$

mit

$$Q = \int dV \rho(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3. \tag{1.20}$$

Dann folgt für $\mathbf{E}$ aus (1.11):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{für} \quad r \geq R; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\mathbf{r} \quad \text{für} \quad r \leq R. \tag{1.21}$$

Für die Energie U findet man mit (1.17) und (1.19):

$$U = \frac{\rho_0}{2}\int dV\ \Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0^2}{2\epsilon_0}\int_0^R r^2 dr\ (\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6}) = 2\pi\frac{\rho_0^2}{\epsilon_0}\frac{2R^5}{15} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}. \tag{1.22}$$

Anwendung: Bestimmung des klassischen Elektronenradius.

Nach (1.22) wird die **Selbstenergie** eines punktförmigen Teilchens ($R \to 0$) unendlich. Nun ist nach der Relativitätstheorie die Energie eines ruhenden Teilchens, z. B. eines Elektrons, mit seiner Ruhemasse m_0 verknüpft durch

$$E_0 = m_0 c^2. \tag{1.23}$$

Ein streng punktförmiges (geladenes) Teilchen hätte also nach (1.22) eine unendlich große Ruhemasse! Führen wir andererseits die gesamte (endliche) Ruhemasse eines Elektrons auf seine elektrostatische Energie zurück, so müssen wir dem Elektron einen endlichen Radius R_0, den *klassischen Elektronenradius* zuordnen,

$$R_0 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \approx 10^{-13}\ \text{cm} = 1\ \text{fm}. \tag{1.24}$$

Für Dimensionen $< 10^{-13}$ cm müssen wir also für Elektronen mit Abweichungen vom Coulomb'schen Gesetz rechnen.

1.5 Multipolentwicklung

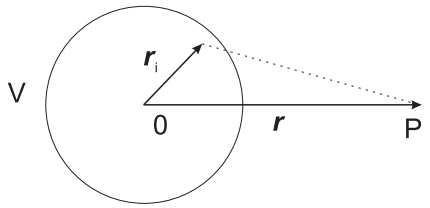
Wir betrachten ein auf ein endliches Volumen V begrenzte Ladungsverteilung (diskret oder kontinuierlich) und untersuchen ihr Potential Φ in einem Punkt P weit außerhalb von V.

Der Koordinatenursprung 0 möge innerhalb V liegen; wir können z.B. 0 als Ladungsschwerpunkt, definiert durch

$$\mathbf{r}_q = \frac{\sum_i |q_i|\mathbf{r}_i}{\sum_i |q_i|} \tag{1.25}$$

wählen. Solange $r_i \ll r$, können wir (1.10) durch eine Taylor-Reihe darstellen,

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + ... \tag{1.26}$$



deren erste Terme lauten:

1.) **Monopol-Anteil**:

$$\Phi_0 = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{1.27}$$

beschreibt eine am Ursprung 0 lokalisierte Punktladung Q. In 0. Näherung der Taylor-Entwicklung, d.h. aus genügend großer Entfernung, sieht jede Ladungsverteilung wie eine Punktladung aus!

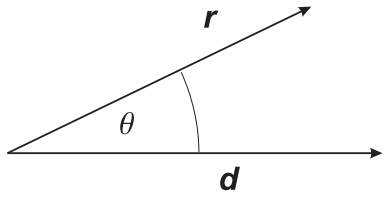
2.) **Dipol-Anteil**:
Der in den Koordinaten $\mathbf{r}_i$ der Punktladungen lineare Term hat folgende Form:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} x_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right)_{r_i=0} + \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} y_i \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right)_{r_i=0} + \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} z_i \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\right)_{r_i=0} \\ &= -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x} + y_i\frac{\partial}{\partial y} + z_i\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d\ cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{aligned} \tag{1.28}$$

wobei der Vektor $\mathbf{d}$, das **Dipolmoment**, gegeben ist durch

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i. \tag{1.29}$$

Der Winkel θ ist der Winkel zwischen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{d}$:



Bei den Umformungen in (1.28) wurde benutzt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}. \tag{1.30}$$

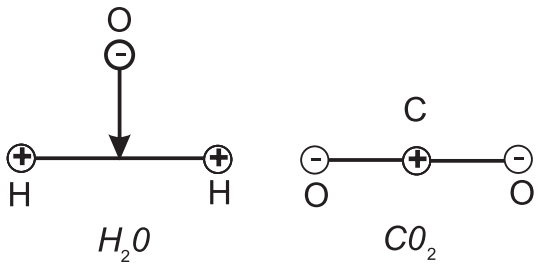
Abhängigkeit des Dipolmoments vom Koordinatenursprung: Verschiebt man den Ursprung 0 um $\mathbf{a}$, so wird

$$\mathbf{d}' = \sum_i q_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{d} - Q\mathbf{a}. \tag{1.31}$$

Falls $Q \neq 0$, kann man **a** so wählen, daß **d**' $= 0$ wird. Wenn dagegen $Q = 0$ ist, so wird dagegen $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$ unabhängig vom Ursprung und das Dipolmoment beschreibt eine echte *innere* Eigenschaft des betrachteten Systems.

Konstruktionsanleitung: Man bestimme die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladungsträger. Fallen diese zusammen, so ist nach (1.29) $\mathbf{d} = 0$. Andernfalls gibt ihre Verbindungslinie die Richtung von **d**, ihr Abstand ist ein Maß für den Betrag von **d**.

Beispiel: Moleküle.



3.) **Quadrupol-Anteil**:

$$4\pi\epsilon_0\Phi_2 = \frac{1}{2}\{Q_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) + Q_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{1}{r}) + Q_{zz}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{r}) \tag{1.32}$$

$$+Q_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\frac{1}{r}) + Q_{yz}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\frac{1}{r}) + Q_{zx}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}(\frac{1}{r}),$$

$$+Q_{yx}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(\frac{1}{r}) + Q_{zy}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}(\frac{1}{r}) + Q_{xz}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\frac{1}{r})\},$$

wobei

$$Q_{xx} = \sum_i q_i\ x_i^2; \qquad Q_{xy} = \sum_i q_i\ x_i y_i; \qquad etc. \tag{1.33}$$

die Komponenten des **Quadrupol-Tensors** sind. Er ist symmetrisch und reell und kann daher stets diagonalisiert werden:

$$Q_{mn} = Q_m \delta_{mn}. \tag{1.34}$$

Es besteht hier eine weitgehende Analogie zum Trägheitstensor in der Mechanik.
Normierung: Die Beziehung

$$\Delta(\frac{1}{r}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\frac{1}{r} = (\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r})\frac{1}{r} \tag{1.35}$$

$$= -\frac{3}{r^3} + 3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = 0 \qquad \text{für} \quad r \neq 0$$

erlaubt uns die Komponenten (1.33) in (1.34) im Hauptachsensystem zu ersetzen durch:

$$Q_x = \sum_i q_i(x_i^2 - \frac{r_i^2}{3}) = \frac{1}{3}\sum_i q_i\{2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2\}, \tag{1.36}$$

ohne dabei Φ_2 zu ändern. (1.36) zeigt, daß die Eigenwerte Q_m die Abweichungen von der Kugelsymmetrie beschreiben, denn für sphärische Ladungsverteilungen wird:

$$\sum_i q_i \; x_i^2 = \sum_i q_i \; y_i^2 = \sum_i q_i \; z_i^2 \rightarrow Q_m = 0. \tag{1.37}$$

Spezialfall: Axialsymmetrie z.B. um die z-Achse. Dann wird

$$Q_x = Q_y = -\frac{1}{2} Q_z, \tag{1.38}$$

d.h. der Quadrupol - Anteil Φ_2 ist durch 1 Zahl, das **Quadrupolmoment**, zu kennzeichnen. Für diesen Fall ist die Winkelabhängigkeit von Φ_2 leicht anzugeben: Wir bilden

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) = -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}, \tag{1.39}$$

und entsprechend für y und z, und finden mit (1.38):

$$\Phi_2 = \frac{3Q_z(3z^2 - r^2)}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2r^3}, \tag{1.40}$$

wobei

$$Q_0 = \frac{3}{2} Q_z \tag{1.41}$$

als **Quadrupolmoment** der axialsymmetrischen Ladungsverteilung bezeichnet wird. Gleichung (1.40) zeigt die für den Quadrupol - Anteil charakteristische r − Abhängigkeit; die Winkelabhängigkeit ist deutlich von der des Dipol - Terms zu unterscheiden.

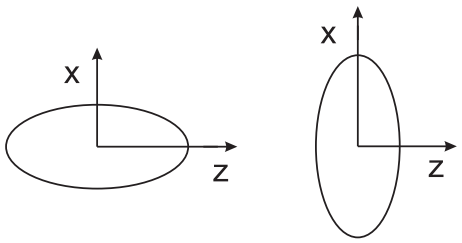
Kontinuierliche Ladungsverteilungen:

Analog zu Abschnitt 1.4 erhalten wir für eine kontinuierliche (räumlich begrenzte) Ladungsverteilung:

$$\mathbf{d} = \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \tag{1.42}$$

anstelle von Gleichung (1.29) und (1.36) ist zu ersetzen durch:

$$Q_x = \frac{1}{3} \int dV \rho(\mathbf{r})(2x^2 - y^2 - z^2). \tag{1.43}$$



Beispiel: Eine ganze Reihe von Atomkernen ist (axialsymmetrisch) deformiert und elektrostatisch durch ein Quadrupolmoment charakterisiert. Die Abweichungen von der Kugelsymmetrie können dabei sowohl *positiv*, $Q_0 > 0$, als auch *negativ* sein, $Q_0 < 0$, was anschaulich einer *Zigarre* bzw. einer *Scheibe* entspricht.

Kapitel 2

Grundlagen der Elektrostatik

2.1 Fluß eines Vektor-Feldes

Wir wollen im folgenden nach äquivalenten Formulierungen des Coulomb'schen Gesetzes suchen. Dazu führen wir den Begriff des **Flusses eines Vektor-Feldes** ein.

Ein Vektor-Feld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sei auf einer Fläche F definiert. F sei *meßbar* und *zweiseitig*, d.h. F möge einen endlichen Flächeninhalt besitzen und *Ober*- und *Unterseite* von F seien (durch die Flächennormale) wohl definiert. **Gegenbeispiel**: das Möbius'sche Band.

Den Fluß des Vektor-Feldes $\mathbf{A}$ durch die Fläche F definieren wir dann durch das Oberflächenintegral

$$\int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_F A_n df, \tag{2.1}$$

wobei A_n die Komponente von $\mathbf{A}$ in Richtung der Flächennormalen ist.

Zur Interpretation von (2.1) betrachten wir eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und der Dichte $\rho(\mathbf{r})$. Wählen wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{2.2}$$

so bedeutet

$$\int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_F \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \tag{2.3}$$

die pro Zeiteinheit durch F fließende Menge Flüssigkeit. (2.3) zeigt, daß nur die senkrecht zur Strömung stehende Fläche wirksam wird.

2.2 Satz von Gauß

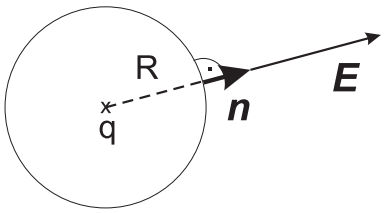
Wir wählen nun für $\mathbf{A}$ das elektrostatische Feld $\mathbf{E}$ und für F eine geschlossene Fläche mit den oben erwähnten Eigenschaften. Dann ist der **elektrische Fluß**

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint_F E_N df \tag{2.4}$$

mit der in dem Volumen V enthaltenen Gesamtladung Q verknüpft durch (**Satz von Gauß**):

$$\Psi = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{2.5}$$

Beweis: 1. Schritt: q sei eine einzelne Punktladung im Mittelpunkt einer Kugel mit Radius R. Dann ist in jedem Punkt der Kugeloberfläche **E** parallel zu der (äußeren) Flächennormale **n**



und für den Betrag von **E** gilt:

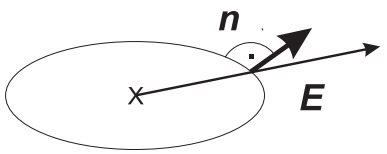
$$E = E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{2.6}$$

Also wird:

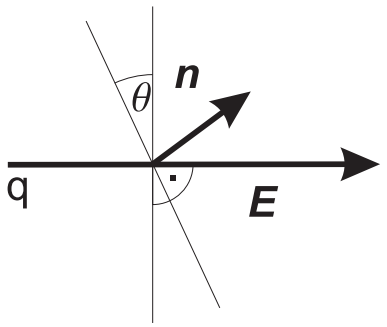
$$\Psi = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{2.7}$$

unabhängig von Radius R der Kugel.

2. Schritt: Wir ersetzen die Kugeloberfläche durch eine im Rahmen der unter 2.1) genannten Voraussetzungen beliebige geschlossene Fläche,



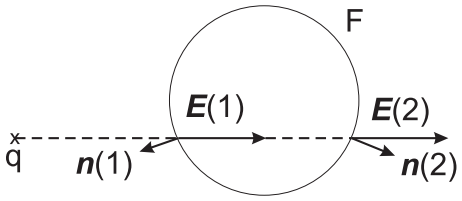
Ausschnitt:



Dann wird

$$\Psi = \oint_F \frac{qcos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} df = \oint_F \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} df' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{2.8}$$

3. Schritt: q liege außerhalb F.



Unter Beachtung der jeweiligen Normalenrichtung (nach außen!) findet man, daß sich z.B. die Beiträge aus der Umgebung von Punkt 1 und 2 gerade wegheben. Dabei geht wieder ein, daß die Feldstärke $\mathbf{E}$ stets radial (von q aus) gerichtet ist und wie $1/R^2$ abfällt, während df mit R^2 zunimmt. Man erhält also

$$\Psi = 0 \tag{2.9}$$

für den elektrischen Fluß .

4. Schritt: Für N Punktladungen q_i innerhalb von F finden wir nach dem Superpositionsprinzip:

$$\Psi = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{2.10}$$

2.3 Anwendungen des Gauß'schen Satzes

Für symmetrische Ladungsverteilungen bietet (2.5) die Möglichkeit, die Feldstärke $\mathbf{E}$ mit geringem Aufwand zu berechnen. Wir betrachten 2 **Beispiele**:

1. Feld einer homogen-raumgeladenen Kugel. Sei

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) \quad \text{für} \quad r \leq R, \quad \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{sonst.} \tag{2.11}$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie ist $\mathbf{E}$ radial gerichtet, sodaß

$$\Psi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0}, \tag{2.12}$$

wobei Q_r die in einer konzentrischen Kugel mit Radius r enthaltene Ladung ist.

Für Punkte mit $r \geq R$ ist $Q_r = Q$ die Gesamtladung und es folgt aus (2.12):

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für} \quad r \geq R. \tag{2.13}$$

Für $r \leq R$ hängt das Ergebnis von der speziellen Form von $\rho(r)$ ab. Als Beispiel wählen wir

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{ const}, \tag{2.14}$$

dann wird:

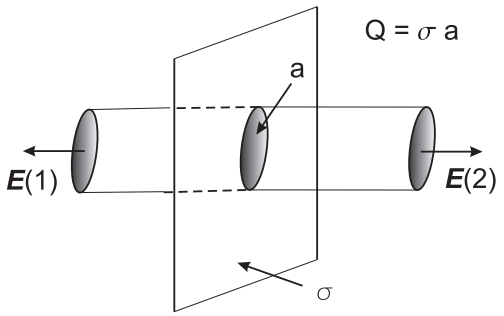
$$Q_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \tag{2.15}$$

also wie in (1.21):

$$E(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r. \tag{2.16}$$

Man vergleiche den Rechenaufwand hier mit dem, den Gleichung (1.15) erfordert!

2.) Homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebene.



Aus Symmetriegründen steht $\mathbf{E}$ senkrecht zur Ebene, der Betrag E ist gleich für die Punkte 1 und 2, welche von der Ebene den Abstand r haben mögen. Der Gauß'sche Satz ergibt dann:

$$\Psi = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = aE(1) + aE(2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0}, \tag{2.17}$$

wenn a die Zylindergrundfläche ist und σ die Flächenladungsdichte. Vom Zylinder-Mantel erhält man keinen Beitrag, da $\mathbf{E}$ keine Komponente in Richtung der Normalen auf dem Zylinder-Mantel hat. Ergebnis:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{2.18}$$

unabhängig von r.

2.4 Differentialgleichungen für E und Φ

Wir wollen den Gauß'schen Satz (2.5) in differentieller Form darstellen. Dazu formen wir das Flächenintegral um in ein Volumenintegral über das von F eingeschlossene Volumen V (Gauß'sche Formel):

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \; dV = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{2.19}$$

Mit

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) \; dV \tag{2.20}$$

folgt dann:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) \; dV = 0. \tag{2.21}$$

Gleichung (2.21) muß für beliebige Volumen V gelten, kann also nur erfüllt sein, wenn der Integrand verschwindet:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{2.22}$$

Gleichung (2.22) ändert sich nicht, wenn man zu $\mathbf{E}$ eine beliebige divergenzfreie Vektorfunktion $\mathbf{E}'$ addiert; Gleichung (2.22) reicht daher zur Bestimmung des elektrischen Feldes nicht aus. Eine weitere differenzielle Beziehung für $\mathbf{E}$ erhalten wir aus (vgl. (1.11))

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \tag{2.23}$$

über die Vektorindentität (ÜB)

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \tag{2.24}$$

nämlich (**Wirbelfreiheit**):

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{2.25}$$

Aus (2.22) und (2.25) kann man bei gegebener Ladungsverteilung ρ die Feldstärke des elektrostatischen Feldes bestimmen, was jedoch recht aufwendig ist.

In der Praxis geht man noch einen Schritt weiter von der Feldstärke $\mathbf{E}$ zum Potential Φ, aus dem sich durch Differentiation gemäß (2.23) $\mathbf{E}$ gewinnen läßt. Setzt man (2.23) in (2.22) ein, so erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.26}$$

die **Poisson'sche Gleichung** mit der Abkürzung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.27}$$

Hat man eine Lösung von (2.26) gefunden, so kann man dazu eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung (**Laplace-Gleichung**)

$$\Delta\Phi = 0 \tag{2.28}$$

addieren und erhält eine neue Lösung von (2.26). Diese Mehrdeutigkeit kann man durch Vorgabe von Randbedingungen beseitigen. Für die weitere Diskussion sei auf Kapitel 3 verwiesen!

2.5 Energie des elektrostatischen Feldes

Um eine Punktladung q_1 aus dem Unendlichen an eine Ladung q_2 auf den Abstand r_{12} heranzubringen, benötigt (oder gewinnt) man die Energie

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \tag{2.29}$$

Will man aus N Punktladungen q_i eine bestimmte (durch die Abstände der Ladungen q_i charakterisierte) Ladungsanordnung aufbauen, so benötigt (oder gewinnt) man entsprechend die Energie

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}; \tag{2.30}$$

der Faktor 1/2 sorgt dafür, daß Doppelzählungen vermieden werden, die Einschränkung $i \neq j$ schließt **Selbstenergien** der Punktladungen aus.

Stellt man das Bild der Punktladungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, so interpretiert man U als die **potentielle Energie** eines Systems von geladen Massenpunkten. Man kann auch das Bild des elektrischen Feldes in den Mittelpunkt stellen. Dann ist die zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigte Energie U im elektrischen Feld *gespeichert* in Form von **Feldenergie**. Da die Coulomb-Kraft konservativ ist, geht die beim Aufbau des Feldes (also der Herstellung einer bestimmten Ladungsanordnung) geleistete Arbeit nicht verloren.

Um den Zusammenhang der beiden Betrachtungsweisen quantitativ zu fassen, formen wir (2.30) um (vergl. Kapitel 1):

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i \Phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) dV, \tag{2.31}$$

wobei $\Phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort $\mathbf{r}_i$ der i-ten Punktladung ist, welches die anderen Punktladungen dort erzeugen. Gleichung (2.31) können wir mit (2.26) umschreiben zu:

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \Phi(\mathbf{r})\Delta\Phi(\mathbf{r})\ dV. \tag{2.32}$$

Gleichung (2.33) beschreibt die Energie U vollständig durch das Potential Φ, d.h. durch das elektrostatische Feld ohne Bezug auf die Ladungen, die dieses Feld erzeugt haben. Man kann U statt durch das Potential Φ durch die Feldstärke $\mathbf{E}$ ausdrücken, wenn man die Identität (ÜB)

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = (\nabla f)\cdot(\nabla g) + f\Delta g \tag{2.33}$$

für $f = g = \Phi$ benutzt:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V (\nabla\Phi(\mathbf{r}))^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2}\oint_F \Phi\nabla\Phi\cdot d\mathbf{f}, \tag{2.34}$$

und die Gauß'sche Formel anwendet, wonach

$$\int_V \nabla\cdot(\Phi\nabla\Phi)\ dV = \oint_F \Phi\nabla\Phi\cdot d\mathbf{f} \tag{2.35}$$

mit F als Oberfläche von V. Wenn sich nun alle Ladungen im Endlichen befinden, so verschwindet in (2.34) das Oberflächenintegral mit zunehmendem Volumen V, da $\Phi\nabla\Phi$ mit wachsendem Abstand vom Ladungszentrum wie R^{-3} abfällt, während die Oberfläche nur mit R^2 anwächst. Im Limes $V \to \infty$ bleibt also:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V (\nabla\Phi(\mathbf{r}))^2\ dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V E^2\ dV \tag{2.36}$$

als die im Feld gespeicherte Energie. $\epsilon_0 E^2(\mathbf{r})/2$ gibt dann die **Energiedichte** an.

2.6 Multipole im elektrischen Feld

Wenn eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung ρ in ein äußeres elektrostatisches Feld, gegeben durch sein Potential Φ_a, gebracht wird, so gilt (entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 2.5) für seine Energie

$$U = \int_V \rho(\mathbf{r})\Phi_a(\mathbf{r})dV, \tag{2.37}$$

wenn man annimmt, daß das äußere Feld durch ρ nicht (merklich) geändert wird und die das äußere Feld Φ_a hervorrufenden Ladungen sich außerhalb des Gebietes V befinden, auf das ρ beschränkt ist. Damit erklärt sich das Fehlen des Faktors 1/2 in (2.37) verglichen mit (2.31). Weiter sei Φ_a in V langsam veränderlich, so daß wir Φ_a bzgl. des Ladungsschwerpunktes in eine Taylor-Reihe entwickeln können:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \Phi_a(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_i}(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial x_i \partial x_j}(0) + ... \tag{2.38}$$

Da im Gebiet V für das äußere Feld

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0 \tag{2.39}$$

nach Annahme gilt, können wir (vergl. Kapitel 1.5) Gleichung (2.38) wie folgt umformen:

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \Phi_a(0) - \sum_{i=1}^{3} x_i E_{ia}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} (x_i x_j - \frac{r^2}{3}\delta_{ij}) \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j}(0) + ... \tag{2.40}$$

Kombination von (2.37) und (2.40) ergibt:

$$U = Q\Phi_a(0) - \sum_{i=1}^{3} d_i E_{ia}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j}(0) + ... \tag{2.41}$$

Gleichung (2.41) zeigt, wie die Multipolmomente einer Ladungsverteilung ρ mit einem äußeren Feld $\mathbf{E}_a$ in Wechselwirkung tritt: die Gesamtladung Q mit dem Potential Φ_a, das Dipolmoment $\mathbf{d}$ mit der Feldstärke $\mathbf{E}_a$, der Quadrupoltensor Q_{ij} mit dem Feldgradienten $\partial E_{ia}/\partial x_j$ etc.
Anwendungsbeispiele: atomare Dipole im äußeren elektrischen Feldern, Wechselwirkung des Kern-Quadrupolments mit der Elektronenhülle.

Kapitel 3

Randwertprobleme der Elektrostatik

3.1 Eindeutigkeitstheorem

Wir wollen im folgenden zeigen, daß die Poisson-Gleichung bzw. die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, wenn eine der folgenden Randbedingungen gilt:
i) **Dirichlet - Bedingung**

$$\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } F \tag{3.1}$$

oder ii) **von Neumann-Bedingung**

$$\nabla\Phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } F, \tag{3.2}$$

Beweis: Wir nehmen an, daß es 2 Lösungen Φ_1 bzw. Φ_2 von

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.3}$$

mit den gleichen Randbedingungen, (3.1) oder (3.2), gibt. Dann gilt für die Differenz $U = \Phi_1 - \Phi_2$:

$$\Delta U = 0 \tag{3.4}$$

in dem von F umschlossenen Volumen V. Weiter ist wegen der Randbedingungen

$$U = 0 \qquad \text{auf } F \tag{3.5}$$

oder

$$\nabla U = 0 \qquad \text{auf } F. \tag{3.6}$$

Mit der Identität

$$\nabla \cdot (U\nabla U) = (\nabla U)^2 + U\Delta U \tag{3.7}$$

und (3.4) wird:

$$\int_V (\nabla U)^2 \, dV = \int_V \nabla \cdot (U\nabla U) \, dV = \oint_F U\nabla U \cdot d\mathbf{f} = 0 \tag{3.8}$$

mit Hilfe der Formel von Gauß, falls eine der beiden Bedingungen (3.5) oder (3.6) gilt. Also:

$$\int_V (\nabla U)^2 \, dV = 0, \tag{3.9}$$

d.h. es ist in V:

$$\nabla U = 0, \tag{3.10}$$

da $(\nabla U)^2 \geq 0$. Damit wird

$$U = \text{ const} \tag{3.11}$$

und Φ_1 und Φ_2 unterscheiden sich höchstens um eine (physikalisch unwesentliche) Konstante.

Sonderfall: $V \to \infty$
Wenn V der gesamte R_3 ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig, falls ρ auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und $\Phi(\mathbf{r})$ asymptotisch so schnell abfällt, daß

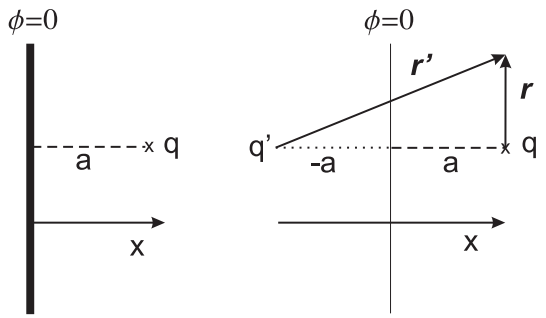
$$r^2 \Phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{r}) \to 0 \qquad \text{für } r \to \infty, \tag{3.12}$$

wo $\partial\Phi/\partial n$ die Normalen-Ableitung von Φ bezeichnet. Der obige Beweis überträgt sich direkt, wenn man beachtet, daß die Oberfläche bei festem Rauminhalt wir r^2 wächst.

3.2 Spiegelungsmethode

Diese Methode besteht darin, außerhalb des zu untersuchenden Bereichs sogenannte **Spiegel-Ladungen** geeigneter Größe so anzubringen, daß mit ihrer Hilfe gerade die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Dieses Verfahren ist deshalb erlaubt, weil man zur Lösung der (inhomogenen) Poisson-Gleichung jede Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung addieren darf (vgl. Kap. 2.4) Durch die Spiegelungsmethode wird diejenige Lösung der Laplace-Gleichung ausgewählt, die zusammen mit der gewählten speziellen Lösung der Poisson-Gleichung die geforderten Randbedingungen erfüllt.

Als einfaches **Beispiel** betrachten wir eine Punktladung q im Abstand a von einer leitenden Ebene, welche geerdet sei (d.h. $\Phi = 0$ auf der Ebene). Die Spiegelladung q' denken wir uns bzgl. der Ebene spiegelsymmetrisch zu q angebracht (Skizze).



Dann beträgt das Potential im Punkt P:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \tag{3.13}$$

und wir erhalten wie gefordert $\Phi = 0$ für alle Punkte der leitenden Ebene, x = 0, wenn wir wählen:

$$q' = -q. \tag{3.14}$$

In dem (uns interessierenden) Bereich x > 0 ist $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung, $q'/(4\pi\epsilon_0 r')$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die gerade dafür sorgt, daß für x = 0 die geforderte Randbedingung gilt.

Für die x-Komponente des elektrischen Feldes **E** erhält man aus (3.13) und (3.14):

$$E_x(P) = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{x-a}{r^3} - \frac{x+a}{r^3}), \tag{3.15}$$

also gilt für die Ebene x = 0,

$$E_x(x=0) = -\frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{3.16}$$

Die Komponenten in der x = 0 Ebene verschwinden, da das elektrische Feld senkrecht auf der Ebene x=0 steht (anderfalls würde ein Strom in der Ebenenoberfläche fliessen bzw. das Potential auf der Fläche nicht konstant sein). Gleichung (3.16) bedeutet nach dem Gauß'schen Satz (vgl. Kap. 2.2), daß in der Ebene x = 0 eine Ladung mit der (ortsabhängigen) Flächendichte

$$\sigma = \epsilon_0 E_x(x=0) = -\frac{qa}{2\pi r^3} \tag{3.17}$$

durch die Anwesenheit der Punktladung q *influenziert* wird.

3.3 Inversionsmethode

Es sei $\Phi(r,\theta,\phi)$ das Potential, das durch Punktladungen q_i am Ort $\mathbf{r} = (r,\theta,\phi)$ erzeugt wird:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + r_i^2 - 2rr_i cos\gamma_i}}; \tag{3.18}$$

hier bezeichnen (r_i,θ_i,ϕ_i) die Orte der Punktladungen q_i und γ_i den Winkel zwischen **r** und $\mathbf{r}_i$. Dann ist

$$\bar{\Phi}(r,\theta,\phi) = \frac{a}{r}\Phi(\frac{a^2}{r},\theta,\phi) \tag{3.19}$$

das Potential, das die Punktladungen

$$\bar{q} = \frac{aq_i}{r_i} \tag{3.20}$$

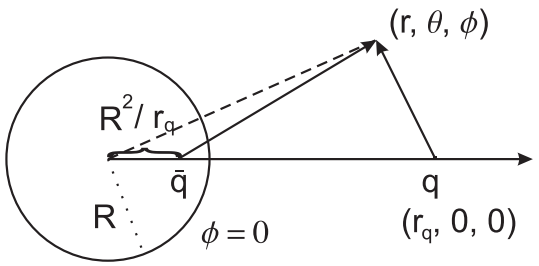
bei $(a^2/r_i,\theta_i,\phi_i)$ am Ort (r,θ,ϕ) erzeugen.

Beweis: Wir kombinieren Gleichungen (3.19) und (3.18) zu

$$\bar{\Phi}(r,\theta,\phi) = \frac{a}{r}\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^4/r^2 + r_i^2 - 2a^2 r_i cos\gamma_i/r}} \tag{3.21}$$

$$= \sum_i \frac{aq_i/r_i}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + a^4/r_i^2 - 2a^2 r cos\gamma_i/r_i}}.$$

Als **Anwendungsbeispiel** betrachten wir eine Punktladung gegenüber einer leitenden Kugel, welche sich auf dem Potential $\Phi = 0$ befinden soll. Wir ersetzen die Kugel durch eine Punktladung $\bar{q}$, deren Größe und Position so zu wählen sind, daß das resultierende Potential von q und $\bar{q}$ auf der Kugeloberfläche gerade verschwindet. Das von der Punktladung q, lokalisiert am Ort $(r_q, 0, 0)$, im Punkt (r, θ, ϕ) erzeugte Potential werde mit $\Phi(r, \theta, \phi)$ bezeichnet. Setzt man nun die Ladung $\bar{q} = -Rq/r_q$ an den Ort $(R^2/r_q, 0, 0)$ (Skizze)



so ist das von $\bar{q}$ am Ort (r, θ, ϕ) erzeugte Potential nach (3.19):

$$\bar{\Phi}(r,\theta,\phi) = -\frac{R}{r}\Phi(\frac{R^2}{r},\theta,\phi). \tag{3.22}$$

Auf der Kugeloberfläche, $r = R$, wird:

$$\bar{\Phi}(R,\theta,\phi) = -\Phi(R,\theta,\phi), \tag{3.23}$$

also wie gefordert

$$\bar{\Phi}(R,\theta,\phi) + \Phi(R,\theta,\phi) = 0. \tag{3.24}$$

Die gesuchte Lösung der Poisson-Gleichung außerhalb der leitenden Kugel ist dann:

$$\bar{\Phi}(r,\theta,\phi) + \Phi(r,\theta,\phi) \tag{3.25}$$

mit

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}. \tag{3.26}$$

3.4 Trennung der Variablen

Wir suchen nach Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \tag{3.27}$$

und nehmen dabei der Einfachheit halber an, daß Φ von z nicht abhängt,

$$\Phi = \Phi(x, y). \tag{3.28}$$

Dann vereinfacht sich (3.27) in kartesischen Koordinaten zu:

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\Phi(x, y) = 0 \tag{3.29}$$

Da (3.29) keinen *Mischterm* $\partial^2/\partial x\partial y\Phi$ enthält, liegt es nahe, folgenden **Separationsansatz** zu machen:

$$\Phi(x, y) = f(x)g(y); \tag{3.30}$$

dann geht (3.29) über in:

$$g(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x) + f(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}g(y) = 0. \tag{3.31}$$

Mit Ausnahme der Nullstellen von f und g ist (3.31) äquivalent zu:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0. \tag{3.32}$$

Der 1. Term in (3.32) hängt nur von x, der 2. nur von y ab; da x und y unabhängige Variablen sind, folgt aus (3.32):

$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{ const} = -\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}. \tag{3.33}$$

Wählen wir die Konstante in (3.33) z.B. positiv reell ($= k^2$), so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f(x) = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 g(y) = 0 \tag{3.34}$$

mit den Lösungen:

$$f(x) = a\ \exp(kx) + b\ \exp(-kx); \quad g(y) = c\ \sin(ky) + d\ \cos(ky). \tag{3.35}$$

Die Integrationskonstanten a, b, c, d und die Separationskonstante k werden durch Randbedingungen festgelegt. Als **Beispiel** betrachten wir einen in z-Richtung unendlich ausgedehnten Rechteck-Zylinder (mit den Kantenlängen x_0 und y_0) mit den Randbedingungen:

$$\Phi(x, 0) = \Phi(x, y_0) = 0, \tag{3.36}$$

woraus

$$d = 0; \qquad \sin(ky_0) = 0 \to k = \frac{n\pi}{y_0} = k_n \tag{3.37}$$

folgt. Weiterhin seien die Randbedingungen

$$\Phi(0, y) = 0; \qquad \Phi(x_0, y) = V(y), \tag{3.38}$$

gegeben, wobei $V(y)$ irgendeine vorgegebene Funktion ist. Aus (3.38) folgt zunächst

$$a = -b \to f = a\{\ \exp(k_n x) - \ \exp(-k_n x)\}. \tag{3.39}$$

Um die 4. Bedingung auch noch zu erfüllen, entwickeln wir nach Fourier:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ \sin(k_n y)\ \sinh(k_n x); \qquad A_n = 2a_n c_n, \tag{3.40}$$

und bestimmen die Koeffizienten A_n aus der Forderung

$$\Phi(x_0, y) = V(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\ \sin(k_n y)\ \sinh(k_n x_0). \tag{3.41}$$

Nach dem Umkehrtheorem für Sinus-Fourier-Reihen erhält man:

$$A_n = \frac{2}{y_0\ \sinh(k_n x_0)} \int_0^{y_0} V(y)\ \ \sin(k_n y) dy. \tag{3.42}$$

Hat man Randbedingungen von sphärischer Symmetrie, so wird man die Laplace-Gleichung lösen durch einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten; entsprechend verfährt man bei axialer Symmetrie.

Übersicht Elektrostatik

1.) Basis: **Coulomb-Gesetz**

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

2.) **Feldgleichungen**:
a) integral:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0; \qquad \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

b) differentiell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0; \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3.) **Elektrostatisches Potential:**

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \to \Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

4.) **Feldenergie**:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \to \frac{1}{2} \int_V \rho\Phi\ dV \to \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2\ dV$$

Potentielle Energie der Punktladungen $\to$ elektrostatische Feldenergie

Teil II

Magnetostatik

Kapitel 4

Ampère'sches Gesetz

4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung

Elektrische Ströme werden durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Ladungsträger können dabei z.B. sein: Ionen in einem Teilchenbeschleuniger, einem Elektrolyten oder einem Gas, Elektronen in einem Metall etc. Ursache für die Bewegung der Ladungen sind in erster Linie elektrische Felder, es kann sich aber auch um materiellen Transport von Ladungsträgern handeln. Als elektrische Stromstärke definieren wir diejenige Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt.

Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst Ladungsträger mit gleicher Ladung q und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Es sei $\mathbf{a}$ der Vektor senkrecht zum Querschnitt des leitenden Mediums, dessen Betrag a die Querschnittsfläche angibt und n die Dichte der Ladungsträger. In der Zeit Δt passieren dann die in dem Volumen $\Delta V = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t$ befindlichen Ladungsträger den Leiterquerschnitt, nämlich $n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t$ Ladungsträger. Damit folgt für die Stromstärke

$$I(a) = \frac{nq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t}{\Delta t} = nq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}). \tag{4.1}$$

Haben wir allgemein pro Volumeneinheit n_i Ladungsträger q_i mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$, so wird:

$$I(a) = \mathbf{a} \cdot (\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i). \tag{4.2}$$

Die Gleichungen (4.1) unf (4.2) legen es nahe, die **Stromdichte j** einzuführen als

$$\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i, \tag{4.3}$$

welche sich für $q_i = q$ mit der mittleren Geschwindigkeit

$$< \mathbf{v} >= \frac{1}{n} \sum_i n_i \mathbf{v}_i \tag{4.4}$$

verknüpfen läßt:

$$\mathbf{j} = nq < \mathbf{v} >= \rho < \mathbf{v} > . \tag{4.5}$$

Gleichung (4.5) macht deutlich, daß hohe Absolutgeschwindigkeiten der Ladungsträger noch keinen hohen Strom bedeuten, da nur der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Ladungsträger wesentlich ist. Sind z.B. die Geschwindigkeiten der Ladungsträger gleichmäßig über alle Richtungen verteilt, so wird $< \mathbf{v} >= 0$ und damit auch $\mathbf{j} = 0$. Im allgemeinen Fall ist ρ und $< \mathbf{v} >$ orts- und zeit-abhängig, also

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \tag{4.6}$$

Den Erhaltungssatz der Ladung können wir mit den Begriffen der Ladungs- und Stromdichte wie folgt formulieren: Wir betrachten ein beliebiges endliches Volumen V mit der Oberfläche F. Die darin enthaltene Ladungsmenge sei $Q = Q(t)$. Wenn V nicht von der Zeit abhängt, so ergibt sich für die Änderung der in V enthaltenen Ladungsmenge pro Zeiteinheit:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{4.7}$$

Da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet werden kann, muß die Abnahme (Zunahme) der in V enthaltenen Ladung gleich der (im betrachteten Zeitraum) durch F hinaus (hinein)-strömenden Ladungsmenge sein. Letztere ist gegeben durch das Oberflächenintegral der Stromdichte, welches nach der Gauß'schen Integralformel in ein Volumenintegral umgeformt werden kann:

$$\oint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j}\, dV. \tag{4.8}$$

Damit lautet die Ladungsbilanz:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j}\, dV \tag{4.9}$$

oder, da V beliebig gewählt werden kann, erhalten wir die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{4.10}$$

Während (4.8) die Ladungserhaltung in *integraler* Form beschreibt, bedeutet (4.10) die Ladungserhaltung in *differentieller* Form.

Spezialfälle:

i) **Elektrostatik**: stationäre Ladungen

$$\mathbf{j} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \rho = \rho(\mathbf{r}) \tag{4.11}$$

ii) **Magnetostatik**: stationäre Ströme

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{und } \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{4.12}$$

Für einen stationären Strom ist nämlich $\nabla \cdot \mathbf{j}$ zeitlich konstant, und diese Konstante muß überall null sein, da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet wird.

4.2 Ampère'sches Gesetz

Gegeben sei eine stationäre Stromverteilung $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Um elektrostatische Effekte zu eliminieren, wollen wir noch annehmen, daß die Dichte der bewegten Ladungsträger, die den Strom aufbauen, kompensiert wird durch ruhende Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens (z.B. bewegte Leitungselektronen und ruhende Gitterionen im metallischen Leiter). Auf eine bewegte Probeladung q wirkt dann in der Umgebung des stromdurchflossenen Leiters eine Kraft, für die man experimentell findet:

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{4.13}$$

mit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Gamma_m \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \tag{4.14}$$

als der **magnetischen Induktion**. Die Gleichungen (4.13) und (4.14) sind als Grundlagen der Magnetostatik ebenso experimentell gesichert wie

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E} \tag{4.15}$$

mit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Gamma_e \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \tag{4.16}$$

in der Elektrostatik! So wie wir (4.15) als Meßvorschrift für das elektrostatische Feld $\mathbf{E}$ auffassen können, so stellt (4.13) eine Meßvorschrift für die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ dar.

Maßsysteme:
Hat man Γ_e festgelegt, d.h. hat man die Einheitsladung definiert, so sind in (4.13) und (4.14) alle auftretenden Größen bzgl. ihrer Einheiten fixiert. Γ_m kann also nicht mehr frei gewählt werden, sondern ergibt sich im

i) **MKSA** -System zu

$$\Gamma_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \tag{4.17}$$

mit

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{m \ \ kg}}{\mathrm{Coul.}^2} \tag{4.18}$$

als der **magnetischen Permeabilität**.

ii) **cgs**-System:

$$\Gamma_m = \frac{1}{c^2} \tag{4.19}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c.

Bemerkung: Gleichung (4.14) enthält - wie in (4.16) - das Superpositionsprinzip: die Felder zweier Stromverteilungen $\mathbf{j}_1$ und $\mathbf{j}_2$ überlagern sich linear, da $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ die resultierende Stromverteilung ist. Weiterhin muß unabhängig vom Maßsystem das Verhältnis

Γ_m/Γ_e eine Konstante sein. Mit (4.17) und (4.19) sowie $\Gamma_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ bzw. $\Gamma_e = 1$ im cgs-System (siehe Kap. 1.2) erhalten wir die Beziehung

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \tag{4.20}$$

Dieser fundamentale Zusammenhang verweist bereits auf einen Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie.

Im folgenden soll das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für verschiedene einfache Stromverteilungen berechnet werden.

4.3 Formel von Biot-Savart

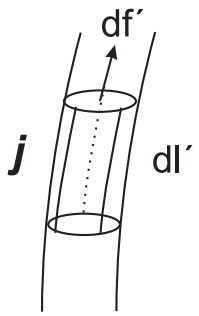
Für einen *dünnen* Leiter können wir sofort über den Leitungsquerschnitt f integrieren und erhalten statt (4.14)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{4.21}$$

mit

$$I = \int_f \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}' \tag{4.22}$$

als der Stromstärke (vgl. Skizze).



Ist der Leiter weiterhin gerade, so folgt aus (4.21) oder auch (4.14), daß die Feldlinien von $\mathbf{B}$ konzentrisch um den Leiter verlaufen. Wir brauchen also nur noch den Betrag B berechnen, da alle Beiträge zum Integral (4.21) für einen geraden Leiter die gleiche Richtung haben. Aus der Skizze folgt:

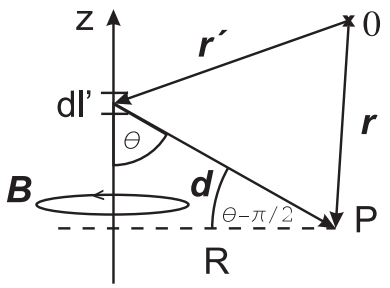
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\sin\theta}{d^2}\, dz \tag{4.23}$$

Die verbleibende Integration führen wir für einen unendlich langen Leiter aus: Mit

$$R = d \;\; \sin\theta; \quad z = R \;\; \mathrm{cotg}\theta \quad \rightarrow dz = \frac{-R}{\sin^2\theta} d\theta \tag{4.24}$$

folgt für die Feldstärke im Punkt P:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \tag{4.25}$$



Dieses ist die Formel von **Biot** und **Savart** für einen dünnen, geraden, unendlich langen Leiter.

4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld

Ausgehend von der Kraft, die eine Ladung q_i erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ im Magnetfeld $\mathbf{B}$ bewegt,

$$\mathbf{K_i} = q_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)), \tag{4.26}$$

erhält man für die Kraft auf einen Strom mit der Stromdichte $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{K} = \sum_i q_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)) = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\, dV; \tag{4.27}$$

das Volumen V ist so zu wählen, daß es den Strom vollständig erfaßt.

Beispiel: Für einen dünnen Draht, über dessen Querschnitt sich das $\mathbf{B}$-Feld nicht (wesentlich) ändert, können wir (wie in Kap. 4.3) 2 der 3 Integrationen in (4.27) ausführen:

$$\mathbf{K} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{4.28}$$

Das verbleibende Kurvenintegral längs des Leiters L läßt sich für einen geraden Leiter ausführen, wenn $\mathbf{B}$ sich längs L nicht ändert:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{I} \times \mathbf{B})L, \tag{4.29}$$

wo L die Länge des Leiters angibt. Die Kraft ist also senkrecht zur Stromrichtung und zum $\mathbf{B}$-Feld; sie ist maximal, wenn $\mathbf{I}$ parallel $\mathbf{B}$ ist, und verschwindet, wenn $\mathbf{I}$ senkrecht zu $\mathbf{B}$ verläuft.

Auf die Ladung q_i mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ im Feld $\mathbf{B}$ wirkt das Drehmoment

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times (q_i\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)); \tag{4.30}$$

entsprechend auf den Strom der Stromdichte $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (q_i\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)) = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\, dV. \tag{4.31}$$

Einfache Beispiele sind (rechteckige oder kreisförmige) Stromschleifen im homogenen **B**-Feld (ÜB).

Für die praktische Auswertung von (4.31) ist es zweckmäßig, mit der Identität ('bac-cab Regel')

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{4.32}$$

umzuformen:

$$\mathbf{N} = \int_V \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B}\} dV. \tag{4.33}$$

Für einen stationären, räumlich begrenzten Strom verschwindet der 2. Term in (4.33). Um dies zu zeigen, benutzen wir die Beziehung $(n, m = 1, 2, 3)$

$$\int_V x_n j_m \, dV = \int_V x_n \nabla \cdot (x_m \mathbf{j}) \, dV = \int_V \nabla \cdot (x_n x_m \mathbf{j}) \, dV - \int_V x_m j_n \, dV \tag{4.34}$$

$$= \int_F x_n x_m \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} - \int_V x_m j_n \, dV = - \int_V x_m j_n \, dV$$

unter Ausnutzung von $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, der Produktregel, der Gauß'schen Formel und dem Verschwinden von $\mathbf{j}$ auf der Oberfläche F. Für $n = m$ folgt aus (4.34)

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \, dV = 0, \tag{4.35}$$

so daß für ein homogenes (schwach veränderliches) Feld in (4.33) der 2. Term (näherungsweise) verschwindet. Entsprechend folgt aus (4.34) für $m \neq n$:

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} \, dV = - \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} \, dV, \tag{4.36}$$

also:

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \, \mathbf{j} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \, \mathbf{j} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}) \, \mathbf{r}\} \, dV = -\frac{1}{2} \mathbf{B} \times \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \, dV \tag{4.37}$$

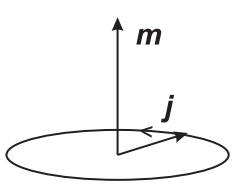
mit Formel (4.32). Ergebnis:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \tag{4.38}$$

mit dem **magnetischen Dipolmoment**

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \, dV. \tag{4.39}$$

Für einen ebenen Strom (z.B. Kreisstrom) steht $\mathbf{m}$ senkrecht zur Stromebene:



Ist der stromführende Leiter dünn, so erhalten wir nach Integration über den Leiterquerschnitt:

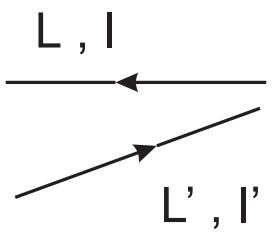
$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_L (\mathbf{r} \times d\mathbf{l}), \tag{4.40}$$

und für den Betrag m:

$$m = IF, \tag{4.41}$$

wobei I die Stromstärke und F die vom Strom eingeschlossene Fläche ist (vgl. hierzu den Flächensatz für die Bewegung eines Massenpunktes im Zentralfeld!).
Anwendungen: Strommessung bzw. Elektromotor.

4.5 Kräfte zwischen Strömen



Mit (4.21) und (4.28) läßt sich die Kraft eines Stromes I' auf einen Strom I bei dünnen Leitern schreiben als:

$$\mathbf{K} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} \frac{d\mathbf{l} \times (d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{4.42}$$

Gleichung (4.42) kann mit Hilfe von (4.32) symmetrisiert werden:

$$\mathbf{K} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} \frac{(d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{4.43}$$

denn

$$\int_L \frac{d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\int_L \nabla(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{4.44}$$

für geschlossene oder unendlich lange Leiterkreise. Gleichung (4.43) ändert bei Vertauschung der beiden Ströme, d.h. von I und I' sowie von $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$, das Vorzeichen. Darin spiegelt sich das Actio-Reactio-Prinzip wider, welches für elektrostatische wie für magnetostatische Wechselwirkungen gilt. Es wird allerdings durchbrochen bei beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Ladungsverteilungen (siehe Kap. 6).

Kapitel 5

Grundgleichungen der Magnetostatik

5.1 Divergenz der magnetischen Induktion

Gleichung (4.14) kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times (\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'). \tag{5.1}$$

Zum Beweis führe man die der Operation $\nabla\times$ entsprechenden Differentiationen unter dem Integral aus. Gemäß (5.1) kann also $\mathbf{B}$ in der Form

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5.2}$$

dargestellt werden mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'. \tag{5.3}$$

Dann wird

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \tag{5.4}$$

Gleichung (5.4) entspricht formal

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{5.5}$$

und zeigt, daß es keine *magnetischen Ladungen* gibt. Bilden wir nämlich die zu (5.4) korrespondierende integrale Aussage

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = \oint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0, \tag{5.6}$$

so sehen wir, daß der Fluß der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Fläche F verschwindet. Der Vergleich mit:

$$\oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{5.7}$$

erklärt die obige Aussage.

5.2 Rotation von B

In der Elektrostatik hatten wir gefunden

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{5.8}$$

oder gleichwertig

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{5.9}$$

nach der Formel von Stokes. Entsprechend wollen wir im folgenden das Linienintegral

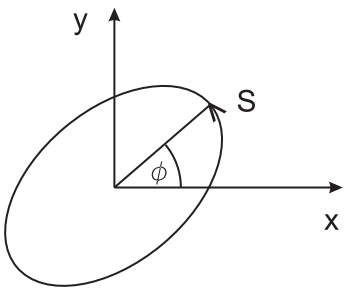
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \tag{5.10}$$

über einen geschlossenen Weg S untersuchen und dann über die Formel von Stokes $\nabla \times \mathbf{B}$ berechnen.

Wir betrachten zunächst einen unendlich langen, dünnen, geraden Leiter. Dafür hatten wir gefunden

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I\mu_0}{2\pi r}\mathbf{e}_\phi, \tag{5.11}$$

wobei r der Abstand vom Leiter ist, I die Stromstärke und $\mathbf{e}_\phi$ die Richtung angibt: die Feldlinien laufen konzentrisch um den Leiter. Als Weg S betrachten wir zunächst eine geschlossene (stückweise) glatte Kurve in der Ebene senkrecht zum Leiter, welche den Leiter umfaßt (Skizze).



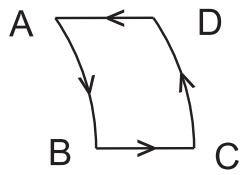
Dann wird:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint_S \frac{\mathbf{e}_\phi \cdot d\mathbf{s}}{r} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \oint d\phi = I\mu_0. \tag{5.12}$$

Wenn S den Strom nicht umfaßt, so gilt:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{5.13}$$

Das ist für den folgenden Weg sofort klar:



Die Wegstücke AD, BC tragen zum Integral nicht bei, da sie senkrecht zu $\mathbf{B}$ verlaufen. An Hand von (5.12) zeigt man, daß die Beiträge von AB, DC sich gerade kompensieren aufgrund des entgegengesetzten Umlaufsinns.

Die obigen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern, indem man Ströme vom oben diskutierten Typ superponiert und geschlossene Raumkurven S aus ebenen Wegstücken zusammensetzt. Ohne auf Beweis-Details einzugehen - was Aufgabe der Mathematik ist - halten wir als generelles Ergebnis fest:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I, \tag{5.14}$$

wobei I die Stromstärke des von S umschlossenen Stromes ist. **Bemerkung**: Umläuft S den Strom n-fach, so ist I durch nI zu ersetzen.

Die zu (5.9) analoge integrale Aussage (5.14) können wir mit Hilfe des **Satzes von Stokes** in eine differentielle Beziehung umwandeln. Der Satz von Stokes gestattet, das obige Linienintegral in ein Oberflächenintegral umzuformen:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} \tag{5.15}$$

wobei F eine beliebige glatte, in den geschlossenen Weg S eingespannte, orientierbare Fläche ist. F und S liegen im Definitionsbereich des stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\mathbf{B}$. Mit (5.15) ergibt sich aus (5.14):

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = \mu_0 I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}, \tag{5.16}$$

oder, da F beliebig gewählt werden kann:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \tag{5.17}$$

Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld $\mathbf{E}$ mit $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ist also das $\mathbf{B}$-Feld nicht **wirbelfrei**.

5.3 Vektor-Potential

Statt $\mathbf{B}$ bei gegebener Stromverteilung $\mathbf{j}$ aus (5.4) und (5.17) zu berechnen, wollen wir entsprechend dem elektrostatischen Potential Φ eine Hilfsgröße einführen, das sogenannte **Vektor-Potential**, aus dem die magnetische Induktion durch Differenzieren gewonnen werden kann. Wir hatten sie in Kap. 5.1 schon kurz eingeführt:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{5.18}$$

und wollen nun versuchen, für das Vektor-Potential $\mathbf{A}$ eine Differentialgleichung zu finden, aus der sich $\mathbf{A}$ bei gegebener Stromverteilung $\mathbf{j}$ berechnen läßt. Wir bilden:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \tag{5.19}$$

Der 1. Term auf der rechten Seite in (5.19) läßt sich beseitigen und damit die gesuchte Differentialgleichung vereinfachen, indem man ausnutzt, daß $\mathbf{A}$ über (5.18) nicht eindeutig definiert ist. Das Feld $\mathbf{B}$ ändert sich nämlich nicht, wenn man die **Eichtransformation**

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \tag{5.20}$$

durchführt, wobei χ eine beliebige (mindestens 2-mal partiell differenzierbare) skalare Funktion ist, denn:

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla\mathbf{A} + 0. \tag{5.21}$$

Ist nun

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \tag{5.22}$$

so wählen wir χ so, daß

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla\chi) = 0. \tag{5.23}$$

Das gesuchte χ finden wir also durch Lösen einer Differentialgleichung vom Typ (2.28):

$$\Delta\chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}, \tag{5.24}$$

wo $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als eine gegebene Inhomogenität anzusehen ist. Es läßt sich also stets erreichen (ohne die Physik, d.h. das $\mathbf{B}$-Feld in irgendeiner Weise einzuschränken!) daß :

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{5.25}$$

gilt. Die vektorielle Gleichung (5.25) zerfällt in ihre 3 Komponenten, welche mathematisch gesehen wieder vom bekannten Typ der Poisson-Gleichung (2.28) sind.

5.4 Multipolentwicklung

Analog dem Fall der Elektrostatik interessiert man sich oft für das $\mathbf{B}$-Feld in großer Entfernung von der (räumlich lokalisiert angenommenen) Stromverteilung $\mathbf{j}$. Dann empfiehlt es sich, das Vektor-Potential $\mathbf{A}$ analog Φ in eine Taylorreihe zu entwickeln:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + ... \tag{5.26}$$

mit dem
Monopolanteil:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV' \tag{5.27}$$

als 1. Term der Entwicklung von Gleichung (5.3). Nun ist für jede Komponente $i = 1, 2, 3$

$$\int_V j_i(\mathbf{r}')dV' = \int_V \nabla' \cdot (x_i' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}'))\, dV' = \oint_F x_i' \, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' = 0 \tag{5.28}$$

wegen $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, der Formel von Gauß und der Tatsache, daß $\mathbf{j} \neq 0$ nur innerhalb von V und auf der Oberfläche von V verschwindet. Also folgt:

$$\mathbf{A}_0 = 0 \tag{5.29}$$

da es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt, wenn man mit (1.27) vergleicht.

Dipolanteil:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')\, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV'. \tag{5.30}$$

Das Integral (5.30) formen wir um gemäß (4.37):

$$\int_V (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')\, dV' = \frac{1}{2}\int_V \{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\, \mathbf{r}'\}\, dV' = \frac{1}{2}\int_V \{\mathbf{r}\times(\mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\mathbf{r}')\}\, dV'. \tag{5.31}$$

Ergebnis:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times (\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{r^3}) \tag{5.32}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment $\mathbf{m}$ von (4.39). Man vergleiche das Ergebnis mit (1.28)!

Analyse von $\mathbf{m}$:
Für N Punktladungen q_i lautet $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i). \tag{5.33}$$

Weiterhin kann $\mathbf{m}$ in einen einfachen Zusammenhang mit dem Drehimpuls L der N geladenen Massenpunkte gebracht werden, wenn $M_i = M$ und $q_i = q$, nämlich:

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2M}\mathbf{L}. \tag{5.34}$$

Mit dem Bahndrehimpuls eines Systems geladener (identischer) Teilchen ist also ein magnetisches Moment in Richtung von L verknüpft. Diese Aussage gilt auch im atomaren Bereich, z.B. für die Elektronen eines Atoms. Umgekehrt läßt sich jedoch nicht jedes magnetische Moment auf einen Bahndrehimpuls gemäß (5.34) zurückführen. Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) besitzen ein *inneres* magnetisches Dipolmoment, welches nicht mit dem Bahndrehimpuls sondern mit dem *Spin* dieser Teilchen verknüpft ist durch:

$$\mathbf{m}_s = g\frac{q}{2M}\mathbf{s}, \tag{5.35}$$

wobei $\mathbf{s}$ der Spin-Vektor ist und g das *gyromagnetische Verhältnis*. Es ist $g \approx 2.0024$ für Elektronen.

5.5 Energie eines Dipols im äußeren Magnetfeld

Für die Kraft $\mathbf{K}$ auf einen magnetischen Dipol $\mathbf{m}$ in einem räumlich schwach veränderlichen Feld $\mathbf{B}$ findet man:

$$\mathbf{K} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}). \tag{5.36}$$

Zum Beweis greife man zurück auf (4.27) und verfahre entsprechend der Berechnung von $\mathbf{N}$ in Gleichung (4.38). Aus (5.36) ergibt sich für die potentielle Energie des Dipols im $\mathbf{B}$-Feld (nach etwas längerer Rechnung):

$$U = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \tag{5.37}$$

analog zu $-(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$ als Energie eines elektrischen Dipols im elektrostatischen Feld (2.41). Der Dipol wird sich also bevorzugt in Feldrichtung einstellen, da dies der niedrigst möglichen Energie entspricht.

Übersicht über die Magnetostatik

1.) Basis: **Ampère'sches Gesetz**

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV'$$

für stationäre Ströme, wo $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t = 0$.

2.) **Feldgleichungen**: Aus

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

folgt
a) **differentiell**:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

oder
b) **integral**

$$\oint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0; \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

3.) **Vektor-Potential**:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad \rightarrow \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

für $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (**Coulomb-Eichung**).

Teil III

Grundlagen der Elektrodynamik

Kapitel 6

Die Maxwell'schen Gleichungen

6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Im folgenden sollen die Grundgleichungen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ und für das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ für den Fall beliebiger Ladungs- und Stromverteilungen

$$\rho = \rho(\mathbf{r},t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{6.1}$$

aufgestellt werden. Als Definition der Felder benutzen wir in Erweiterung der Gleichungen (1.8) und (4.13) die Beziehung (**Lorentz-Kraft**)

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{6.2}$$

Da ρ und $\mathbf{j}$ nun durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{6.3}$$

verknüpft sind, ist klar, daß elektrisches und magnetisches Feld nicht mehr separat behandelt werden können: Die **Maxwell'schen Gleichungen** sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$.

6.2 Faraday'sches Induktionsgesetz

Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Wenn sich der magnetische Fluß (Kap. 5.1) durch einen geschlossenen Leiterkreis ändert, wird längs des Leiterkreises ein (die Ladungsträger beschleunigendes) elektrisches Feld **induziert**, welches im Leiter einen **Induktionsstrom** hervorruft. Quantitativ gilt:

$$-k\frac{d}{dt}(\int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}) = \oint_S \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}, \tag{6.4}$$

wobei:
i) F eine beliebige in den Leiterkreis S eingespannte Fläche ist (siehe unten);
ii) $\mathbf{E}'$ die induzierte elektrische Feldstärke bezogen auf ein mit dem Leiter S mitbewegtes Koordinatensystem Σ' ist;

iii) k eine vom Maßsystem abhängige Konstante ist, und zwar:

$$k = 1 \quad \text{im} \quad \text{MKSA-System}; \quad k = \frac{1}{c} \quad \text{im} \quad \text{cgs-System} \tag{6.5}$$

Gleichung (6.2) bezieht sich auf das MKSA-System und ist im cgs-System zu ersetzen durch

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = q(\mathbf{E} + (\vec{\beta} \times \mathbf{B})) \tag{6.6}$$

mit $\vec{\beta} = \mathbf{v}/c$. Alle folgenden Formeln beziehen sich auf das MKSA-System.
iv) Das Vorzeichen in (6.4) spiegelt die **Lenz'sche Regel** wider.

Aus i) folgt, daß auch für zeitabhängige Felder wie in der Magnetostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6.7}$$

gilt. Sind nämlich F_1 und F_2 irgendwelche in S eingespannte Flächen, so folgt aus i):

$$\int_{F_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_1 = \int_{F_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_2. \tag{6.8}$$

Unter Beachtung der Orientierung der Flächen ergibt der Satz von Gauß für das durch F_1 und F_2 definierte Volumen:

$$0 = \oint_{F_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_1 - \oint_{F_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV, \tag{6.9}$$

q.e.d. Die universelle Gültigkeit von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ war schon aufgrund der in Kap. 5.1 gegebenen Interpretation zu erwarten.

Diskussion des Induktionsgesetzes

Fall 1: Zeitlich veränderliches $\mathbf{B}$-Feld bei ruhendem Leiterkreis S.

Dann ist $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ die induzierte Feldstärke im Laborsystem Σ und es folgt nach der Formel von Stokes:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = -\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}, \tag{6.10}$$

oder, da F beliebig,

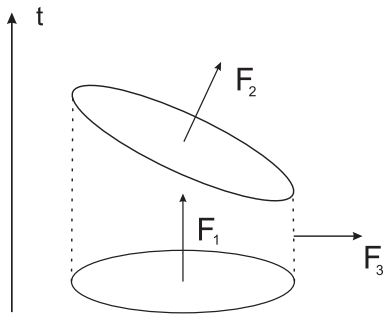
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{6.11}$$

Gleichung (6.11) zeigt die erwartete Verknüpfung der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$.
Bemerkung: Gleichung (6.11) gilt unabhängig davon, ob der Leiterkreis tatsächlich vorhanden ist, er dient nur zum Nachweis des induzierten Feldes!

Anwendung: Betatron

In dem von einem zeitlich veränderlichen $\mathbf{B}$-Feld induzierten elektrischen Feld $\mathbf{E}$ werden geladene Teilchen beschleunigt.

Fall 2: Bewegter Leiterkreis S bei zeitlich konstantem $\mathbf{B}$-Feld.



Erläuterung: F_1 und F_2 seien beliebige in S_1 bzw. in S_2 eingespannte Flächen, F_3 die Mantelfläche, welche S_1 und S_2 verbindet. Die Pfeile deuten die Orientierungen der Flächen an.

Dann gilt nach der Formel von Gauß (Skizze):

$$-\int_{F_1} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}_1 + \int_{F_2} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}_2 + \int_{F_3} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}_3 = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{B})\, dV = 0, \tag{6.12}$$

wenn man (6.7) beachtet.

Für die zeitliche Änderung des Flusses folgt:

$$\frac{d}{dt}\int_F \mathbf{B}\cdot d\mathbf{f} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{\int_{F_2}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}_2 - \int_{F_1}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}_1\} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{F_3}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{f}_3 = \oint \mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times d\mathbf{s}), \tag{6.13}$$

und (6.4) nimmt die Form an:

$$\oint_S \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s} = -\oint_S \mathbf{B}\cdot(\mathbf{v}\times d\mathbf{s}) = \oint_S d\mathbf{s}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{6.14}$$

Gleichung (6.14) gestattet, die von einem zeitlich konstanten Magnetfeld an einer bewegten Leiterschleife induzierte Ringspannung $\oint \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s}$ (**elektromotorische Kraft**) zu berechnen.

Anwendung: Wechselstrom-Generator

Durch Kombination von Fall 1 und Fall 2 erhält man:

$$\oint_S \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s} = -\int_F \frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\mathbf{f} + \oint_S d\mathbf{s}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} + \oint_S(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s}. \tag{6.15}$$

Da die Leiterschleife S beliebig gewählt werden kann, folgt:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{6.16}$$

Dieser Zusammenhang zwischen der (induzierten) elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}'$ im mitbewegten System Σ' und der (induzierten) Feldstärke $\mathbf{E}$ und der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ im Laborsystem Σ läßt sich für $v \ll c$ im Rahmen des Galilei'schen Relativitätsprinzips verstehen:

Auf einen Ladungsträger q des Leiterkreises S wirkt im Laborsystem Σ die Kraft

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})), \tag{6.17}$$

während im mitbewegten System Σ' gilt:

$$\mathbf{K}' = q\mathbf{E}', \tag{6.18}$$

da q in Σ' ruht, also $\mathbf{v}'_q = 0$. Für $\mathbf{v} = \text{const.}$ ist der Zusammenhang von Σ und Σ' durch eine Galilei-Transformation gegeben und es ist

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}', \tag{6.19}$$

woraus direkt (6.16) folgt.

6.3 Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes

Das Ampère'sche Gesetz der Magnetostatik

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \tag{6.20}$$

gilt nur für stationäre Ströme. Bildet man nämlich

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}, \tag{6.21}$$

so erhält man wegen der Identität

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0, \tag{6.22}$$

gerade $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, d.h. stationäre Ströme. Allgemein gilt jedoch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{6.23}$$

so daß (6.20) für nichtstationäre Ströme modifiziert werden muß .

Wie diese Modifikation aussehen muß , wird sofort klar, wenn man das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik (Kap. 2.4) beibehält:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.24}$$

was durch die in Kap. 1.1 aufgeführte Ladungsinvarianz gestützt wird. Kombiniert man nun (6.23) und (6.24), so folgt:

$$\nabla \cdot (\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = 0. \tag{6.25}$$

Ersetzt man daher

$$\mathbf{j} \to \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{6.26}$$

so hat man wieder einen Strom mit verschwindender Divergenz wie in der Magnetostatik. In Einklang mit der Ladungserhaltung erweitern wir also (6.20) wie folgt:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{6.27}$$

Das Ampère'sche Gesetz (6.27) findet seine experimentelle Bestätigung in der Existenz elektromagnetischer Wellen (s.u.).

6.4 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen

Homogene Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{6.28}$$

was dem Fehlen magnetischer Monopole entspricht.

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{6.29}$$

was dem Induktionsgesetz entspricht.

Inhomogene Gleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.30}$$

was dem Gauß'schen Gesetz entspricht.

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{6.31}$$

was dem Ampère-Maxwell'schen Gesetz entspricht.

In (6.30) und (6.31) ist die Ladungserhaltung (6.23) schon implizit enthalten. (6.29) und (6.31) zeigen, daß ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld $\mathbf{B}$ ein elektrisches Feld $\mathbf{E}$ bedingt und umgekehrt. Die Gleichungen (6.28) – (6.31) beschreiben zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{6.32}$$

vollständig die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen im Rahmen der klassischen Physik.

6.5 Selbstinduktion

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung gemäß (6.31) ein magnetisches (und elektrisches) Feld. Ändert sich der Fluß dieses Magnetfeldes durch den Leiterkreis, so wird im Leiterkreis ein Induktionsstrom erzeugt (**Selbstinduktion**), der nach (6.4) dem primären Strom entgegen gerichtet ist (**Lenz'sche Regel**). Die Selbstinduktion hängt von der Geometrie des Leiters ab. Für eine quantitative Formulierung greift man zweckmäßigerweise auf die elektromagnetischen Potentiale zurück (Kap. 7).

Kapitel 7

Die elektromagnetischen Potentiale

7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Statt die gekoppelten Differentialgleichungen (6.28) - (6.31) für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ direkt zu lösen, ist es meist bequemer - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - **elektromagnetische Potentiale** einzuführen.

Da generell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7.1}$$

gilt, können wir ein Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ über die Beziehung

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{7.2}$$

einführen. Dann schreibt sich (6.29) als

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0, \tag{7.3}$$

und die Vektorfunktion $(\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t)$ läßt sich als Gradient einer skalaren Funktion $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ darstellen:

$$(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = -\nabla\Phi, \tag{7.4}$$

oder

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi. \tag{7.5}$$

Damit sind $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ auf das Vektorpotential $\mathbf{A}$ und das skalare Potential Φ zurückgeführt, und wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen $\mathbf{A}$ und Φ berechnet werden können, wenn ρ und $\mathbf{j}$ vorgegeben sind.

Dazu benutzen wir die inhomogenen Gleichungen (6.30) und (6.31). Aus (6.30) folgt mit $\mathbf{E}$ aus (7.5):

$$\Delta\Phi + \nabla \cdot (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7.6}$$

und aus (6.31) mit (7.2):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mu_0\epsilon_0(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}) = \mu_0\mathbf{j}. \tag{7.7}$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = -\Delta \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) \tag{7.8}$$

geht (7.7) über in:

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}) = -\mu_0 \mathbf{j}. \tag{7.9}$$

Damit haben wir die 8 Maxwell-Gleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ überführt in 4 Gleichungen für die Potentiale $\mathbf{A}$ und Φ, die jedoch untereinander gekoppelt sind.

Zur Entkopplung machen wir davon Gebrauch, daß die Maxwell-Gleichungen invariant sind unter **Eichtransformationen** (ÜB):

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla \chi, \tag{7.10}$$

$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \tag{7.11}$$

wobei $\chi(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion ist.

7.2 Lorentz-Konvention

Gleichung (7.9) legt nahe, χ so zu wählen, daß

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{7.12}$$

was der **Lorentz-Konvention** entspricht. Man erhält dann aus (7.9) und (7.6) entkoppelte Gleichungen:

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \tag{7.13}$$

$$\Delta \Phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.14}$$

welche jeweils die gleiche mathematische Struktur besitzen. Sie vereinfachen sich für zeitunabhängige Felder auf die Gleichungen (2.26) und (5.25) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Die Lorentz-Eichung (7.12) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik benutzt unter Verwendung von $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$.

Konstruktion von χ: Falls

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0 \tag{7.15}$$

führen wir eine Eichtransformation durch und fordern:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \Delta \chi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \tag{7.16}$$

Gleichung (7.16) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\Delta \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t). \tag{7.17}$$

Bei gegebener Inhomogenität

$$f(\mathbf{r},t) = -\nabla\cdot\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{7.18}$$

ist die Lösung mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.17) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\chi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \tag{7.19}$$

addiert werden kann.

7.3 Coulomb-Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird χ meist so gewählt, daß

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{7.20}$$

Dann geht (7.6) über in

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{7.21}$$

mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'; \tag{7.22}$$

aus (7.9) wird

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \epsilon_0\mu_0\,\nabla\frac{\partial\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t}\\ &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) - \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t)/\partial t\ (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV' \qquad (7.23)\\ &= -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{(\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}',t))(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV'.\end{aligned}$$

Anwendung: In quellenfreien Gebieten, wo

$$\rho = 0; \quad \mathbf{j} = 0, \tag{7.24}$$

reduzieren sich (7.22) und (7.23) dann auf:

$$\Phi = 0; \quad \Delta\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{7.25}$$

Die Lösungen von (7.25) sind **elektromagnetische Wellen**, z.B. in Form transversaler, ebener Wellen (siehe Kap. 9).

Konstruktion von χ: Erfüllt die Lösung $\mathbf{A}$ von (7.9) nicht die Eichbedingung (7.20), so führen wir die Transformation (7.10), (7.11) durch und fordern

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \Delta\chi = 0, \tag{7.26}$$

oder

$$\Delta\chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}. \tag{7.27}$$

Dies ist ein Spezialfall von (7.17) mit $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als Inhomogenität. Mehrdeutigkeit von χ: Zu jeder Lösung von (7.27) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\chi = 0 \tag{7.28}$$

addieren.

7.4 Induktionsgesetz, Selbstinduktion

Der magnetische Fluß als entscheidende Größe des Induktionsgesetzes läßt sich mit Hilfe des Vektorpotentials wie folgt ausdrücken:

$$\int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \tag{7.29}$$

wenn man den Satz von Stokes anwendet. Die rechte Seite von (7.29) zeigt explizit, daß der Fluß nur vom Weg (Leiterschleife) S abhängt, nicht jedoch von der speziellen Form der in S eingespannten Fläche F.

Für den Fall der Selbstinduktion (Kap. 6.3) hat man bei gegebener Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ aus (7.13) bzw. (7.23) das Vektorpotential $\mathbf{A}$ zu bestimmen und damit das Integral (7.29) zu berechnen. Das Ergebnis hängt bei gegebener Stromstärke nur noch von der Leitergeometrie ab. Es ist wegen

$$\oint_S (\nabla\chi) \cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{7.30}$$

unabhängig von der Wahl der Eichung.

Kapitel 8

Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

8.1 Energie

In Kap. 2.3 hatten wir dem elektrostatischen Feld eine Energie zugeordnet, charakterisiert durch die Energiedichte

$$\omega_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \tag{8.1}$$

Analog kann man dem magnetostatischen Feld eine Energie zuordnen. Wir wollen diesen Schritt überspringen und direkt die Energiebilanz für ein beliebiges elektromagnetisches Feld aufstellen.

Wir betrachten dazu zunächst eine Punktladung q, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in einem elektromagnetischen Feld $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ bewegt. Die an dieser Ladung vom Feld geleistete Arbeit ist gegeben durch:

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \tag{8.2}$$

da das Magnetfeld keine Arbeit leistet. Entsprechend gilt für einen Strom der Stromdichte $\mathbf{j}$:

$$\frac{dW_M}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \; dV. \tag{8.3}$$

Die an den bewegten Punktladungen vom Feld geleistete Arbeit geht auf Kosten des elektromagnetischen Feldes, deren explizite Form im folgenden hergeleitet werden soll.

Wir eliminieren in (8.3) zunächst die sich auf die bewegten Massenpunkte beziehende Stromdichte $\mathbf{j}$ mit Hilfe von Gleichung (6.31):

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \; dV = \int_V (\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \; dV; \tag{8.4}$$

diesen Ausdruck, der nur noch die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ enthält, können wir symmetrisieren bzgl. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ mit den Relationen

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{8.5}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{8.6}$$

Ergebnis:

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\, dV = -\int_V (\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}))\, dV. \tag{8.7}$$

Interpretation:
Fall 1: $V \to \infty$

Aus (8.3) und (8.7) folgt für die **Feldenergie**

$$W_F = \int_V (\frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{\epsilon_0}{2}E^2)\, dV, \tag{8.8}$$

falls die Felder asymptotisch schnell genug abfallen, sodaß der $\nabla\cdot$ - Term in (8.7) verschwindet. Mit Hilfe des Satzes von Gauß ,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, dV = \oint_F (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} \tag{8.9}$$

mit F als Oberfläche des (zunächst als endlich angenommenen) Volumes V, findet man, daß die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ stärker als $1/R$ abfallen müssen, da df mit R^2 anwächst (vgl. Kap. 2.5). Für statische Felder ist die obige Voraussetzung erfüllt, nicht dagegen für Strahlungsfelder (vgl. Kap. 11). In (8.8) können wir nun die **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes**

$$\omega_F = \frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \tag{8.10}$$

einführen, welche sich aus einem elektrischen Anteil (vgl. (8.1))

$$\omega_{el} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \tag{8.11}$$

und einem magnetischen Anteil

$$\omega_{mag} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{8.12}$$

zusammensetzt.

Fall 2: V endlich

Wir behalten die Interpretation von (8.10) bei und schreiben, da V beliebig wählbar ist, (8.7) als (differentielle) Energiebilanz:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \omega_F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \tag{8.13}$$

mit

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \tag{8.14}$$

Interpretation von (8.13): Die Feldenergie in einem Volumen V kann sich ändern dadurch, daß Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung (Kap. 11) hinein- (hinaus-)

strömt, beschrieben durch den Term $\nabla \cdot \mathbf{S}$, und/oder daß an Punktladungen Arbeit geleistet wird, beschrieben durch $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$. In Analogie zur Ladungserhaltung (Kap. 4.1) nennen wir S die **Energiestromdichte** (Poynting-Vektor). Die Energiebilanz zeigt, daß die Energie des abgeschlossenen Systems (Punktladungen plus elektromagnetisches Feld) eine Erhaltungsgröße ist.

8.2 Impuls

Dem elektromagnetischen Feld kann man außer Energie auch Impuls zuordnen. Wir beginnen wieder mit der Impulsbilanz für eine Punktladung q mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Nach Newton gilt dann für die Änderung des Impulses der Punktladung:

$$\frac{d\mathbf{p}_M}{dt} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})); \tag{8.15}$$

entsprechend für N Punktladungen, charakterisiert durch eine Stromdichte $\mathbf{j}$ und Ladungsdichte ρ:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V (\rho\mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}))\ dV. \tag{8.16}$$

Analog zu Kap. 8.1 versuchen wir, ρ und $\mathbf{j}$ zu eliminieren, sodaß die rechte Seite in (8.16) nur noch die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ enthält.

Wir benutzen dazu

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \tag{8.17}$$

und

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{8.18}$$

Das Resultat

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left(\epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}) \right) dV \tag{8.19}$$

können wir bzgl. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ symmetrisieren, indem wir in (8.19) den (verschwindenden) Term

$$\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \tag{8.20}$$

hinzufügen und in

$$-\epsilon_0 (\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \tag{8.21}$$

das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.22}$$

ausnutzen. Ergebnis:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \{[\epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \epsilon_0 (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E}] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\}\ dV. \tag{8.23}$$

Für die Interpretation von (8.23) fassen wir die [....]-Terme wie folgt zusammen:

$$(\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})+\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E}))_i = E_i\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial E_m}{\partial x_m}-\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial E_m}{\partial x_i}E_m+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial E_i}{\partial x_m}E_m \tag{8.24}$$

$$=\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}(E_iE_m)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_m E_m^2)=\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}(E_iE_m-\frac{1}{2}E^2\delta_{im}).$$

Entsprechend verfahren wir für die **B**-Terme. Ergebnis:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M+\mathbf{P}_F)_i=\int_V\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}T_{im}\;dV \tag{8.25}$$

mit

$$T_{im}=\epsilon_0(E_iE_m-\frac{1}{2}E^2\delta_{im})+\frac{1}{\mu_0}(B_iB_m-\frac{1}{2}B^2\delta_{im});\qquad \mathbf{P}_F=\epsilon_0\int_V(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\;dV. \tag{8.26}$$

Fall 1: $V\to\infty$
Wie unter Kap. 8.1 überzeugt man sich, daß die rechte Seite in (8.25) verschwindet, falls die Felder **E** und **B** schneller als $1/R$ abfallen. Dann lautet die Impulsbilanz

$$\mathbf{P}_M+\mathbf{P}_F=\qquad\text{const.} \tag{8.27}$$

Gleichung (8.27) legt nahe, $\mathbf{P}_F$ als Impuls des elektromagnetischen Feldes zu interpretieren. Für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) ist dann der Gesamtimpuls, der sich additiv aus Teilchen- und Feldimpuls zusammensetzt, eine Erhaltungsgröße.

Fall 2: V endlich
Wir formen die rechte Seite in (8.25) mit dem Gauß'schen Satz um:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M+\mathbf{P}_F)_i=\oint_F\sum_{m=1}^{3}T_{im}n_m\;df \tag{8.28}$$

wobei n_m die Komponenten des Normalen-Vektors auf der Oberfläche F von V sind. Da auf der linken Seite von (8.28) nach Newton eine Kraft steht, können wir $T_{im}n_m$ als *Druck* des Feldes (**Strahlungsdruck**) interpretieren. Das elektromagnetische Feld überträgt auf einen Absorber also nicht nur Energie, sondern auch Impuls.

Der Strahlungsdruck des Lichts wurde von Lebedev und Hull direkt an einer Drehwaage nachgewiesen. An den Balkenenden angebrachte Metallplättchen wurden im Takt der Eigenschwingung jeweils belichtet; es wurden in Resonanz gut beobachtbare Ausschläge erhalten. Ein besonders augenfälliger Beweis ist die Krümmung von Kometenschweifen auf Grund des Strahlungsdruckes des von der Sonne emittierten Lichts.

Bemerkung: Die Tatsache, daß die **Impulsdichte**

$$\vec{\pi}_F=\epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{8.29}$$

und die Energiestromdichte **S** sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden,

$$\vec{\pi}_F=\epsilon_0\mu_0\mathbf{S}=\frac{1}{c^2}\mathbf{S}, \tag{8.30}$$

ist kein Zufall, sondern ergibt sich zwangsläufig im Rahmen der relativistischen Formulierung.

8.3 Drehimpuls

Die Änderung des Drehimpulses einer Punktladung q im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch:

$$\frac{d\mathbf{l}_M}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}_M}{dt} = q\mathbf{r} \times (\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{8.31}$$

Entsprechend gilt für N Punktladungen, welche durch ρ und $\mathbf{j}$ charakterisiert seien, im Volumen V:

$$\frac{d\mathbf{L}_M}{dt} = \int_V \mathbf{r} \times (\rho\mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}))\, dV. \tag{8.32}$$

Eliminiert man ρ und $\mathbf{j}$ und symmetrisiert man das Resultat bzgl. $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, so erhält man analog Kap. 8.2:

$$\frac{d\mathbf{L}_M}{dt} = \int_V \mathbf{r} \times \{\epsilon_0\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \epsilon_0(\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\}\, dV. \tag{8.33}$$

Fallen die Felder asymptotisch rasch genug ab, d.h. stärker als $1/R$, so bleibt für $V \to \infty$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_F) = 0, \tag{8.34}$$

mit

$$\mathbf{L}_F = \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, dV \tag{8.35}$$

als **Drehimpuls** des Feldes. Die Summe aus dem mechanischen Drehimpuls $\mathbf{L}_M$ und dem des Feldes $\mathbf{L}_F$ ist eine Erhaltungsgröße:

$$\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_F = \qquad \text{const.} \tag{8.36}$$

8.4 Zusammenfassung

Bei Abwesenheit anderer Kräfte gelten für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls. Da sich Energie, Impuls und Drehimpuls der Punktladungen zeitlich ändern, müssen wir dem Feld selbst Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen, um die Erhaltungssätze für das Gesamtsystem zu garantieren. Die Grundgrößen

Energiedichte

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2, \tag{8.37}$$

Impulsdichte

$$\vec{\pi}_F = \epsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{8.38}$$

und **Drehimpulsdichte**

$$\vec{\lambda}_F = \epsilon_0\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \times \vec{\pi}_F \tag{8.39}$$

findet man aus den jeweiligen Bilanzen unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen. Die Tatsache, daß man dem Maxwell-Feld *mechanische* Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen kann, bietet die Grundlage für die im atomaren Bereich benutzte Beschreibung elektromagnetischer Phänomene durch **Teilchen**, welche als **Photonen** bezeichnet werden.

Teil IV

Elektromagnetische Strahlung

Kapitel 9

Das elektromagnetische Feld im Vakuum

9.1 Homogene Wellengleichungen

Im Vakuum ($\rho = 0; \mathbf{j} = 0$) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{9.1}$$

Zur *Entkopplung* von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ bilden wir z.B.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}; \tag{9.2}$$

das Resultat ist eine **homogene Wellengleichung**

$$(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\mathbf{B} = 0; \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0. \tag{9.3}$$

Analog verfährt man mit dem $\mathbf{E}$-Feld. Mit der Abkürzung

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{9.4}$$

erhält man dann anstelle von (9.1)

$$\Box \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9.5}$$

und

$$\Box \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{9.6}$$

Für die zugehörigen Potentiale findet man nach Kap. 7:

$$\Box \mathbf{A} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{9.7}$$

$$\Phi = 0 \tag{9.8}$$

in der Coulomb-Eichung.

Wir haben also Differentialgleichungen vom Typ

$$\Box f(\mathbf{r},t)=0 \tag{9.9}$$

zu lösen, wobei f für irgendeine Komponente von $\mathbf{E},\mathbf{B}$ oder $\mathbf{A}$ steht. Die Lösungen für $\mathbf{E},\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}$ sind dann noch der Nebenbedingung unterworfen, daß die Divergenz verschwindet (**Transversalitätsbedingung**).

9.2 Ebene Wellen

Ein wichtiger Lösungstyp von (9.9) sind **ebene Wellen**,

$$f=f(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}\mp ct) \tag{9.10}$$

für beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktionen f und Vektoren $\mathbf{q}$ mit $\mathbf{q}^2=1$.

Beweis: Mit der Abkürzung

$$\xi=\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}\mp ct \tag{9.11}$$

bilden wir:

$$\nabla f=\mathbf{q}\frac{df}{d\xi};\quad \Delta f=\mathbf{q}^2\frac{d^2f}{d\xi^2};\quad \mp\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{df}{d\xi};\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{d^2f}{d\xi^2},\qquad \text{q.e.d.} \tag{9.12}$$

Damit ist

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0 f(\mathbf{r},t) \tag{9.13}$$

Lösung von (9.3); analog für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{A}$.

Eigenschaften der Lösungen:

i) Ebene Wellen

Funktionen vom Typ (9.10) beschreiben ebene Wellen, deren Wellenfronten Ebenen sind: Die Punkte $\mathbf{r}$, in denen $f(\mathbf{r},t)$ zu einer festen Zeit t den gleichen Wert annimmt, liegen auf einer Ebenen (Hesse'sche Normalform)

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}=\qquad \text{const}, \tag{9.14}$$

welche senkrecht zu $\mathbf{q}$ steht. Je nach Wahl des Vorzeichens in (9.10) erhält man Wellen, die in $\pm\mathbf{q}$-Richtung laufen.

ii) Transversalität der elektromagnetischen Wellen

Aus $\nabla\cdot\mathbf{B}$ folgt mit (9.13)

$$(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{q})\frac{df}{d\xi}=0, \tag{9.15}$$

also

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{q}=0; \tag{9.16}$$

entsprechend für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{A}$.

iii) Orthogonalität von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$
Aus

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9.17}$$

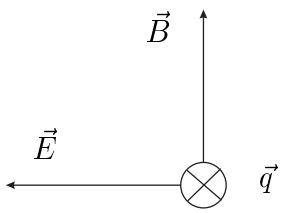
folgt für die ebenen Wellenlösungen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \; f(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - ct); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \; g(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - ct) \tag{9.18}$$

die Beziehung

$$(\mathbf{q} \times \mathbf{E}_0)\frac{df}{d\xi} = c\mathbf{B}_0 \frac{dg}{d\xi}, \tag{9.19}$$

also $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ mit (9.16). $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{q}$ bilden also ein orthogonales Dreibein (siehe Skizze).



Bemerkungen:
1.) Außer ebenen Wellen sind z.B. auch Kugelwellen Lösungen von (9.9); sie haben die Form:

$$\frac{f(r - ct)}{r}, \tag{9.20}$$

wobei f eine beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktion ist. Der Beweis verläuft analog zu (9.12) in Kugelkoordinaten (ÜB).

2.) Die Existenz von elektromagnetischen Wellen (z.B. Lichtwellen, Radiowellen, Mikrowellen, γ-Strahlung etc.) beweist die Richtigkeit der Relation $\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ im Vakuum, welche entscheidend in die Herleitung der Wellengleichungen eingegangen ist. Sie bringt die experimentelle Bestätigung für das Maxwell-Ampère-Gesetz (6.27).

9.3 Monochromatische ebene Wellen

Eine spezielle Form der ebenen Welle ist (z.B. für die elektrische Feldstärke)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)). \tag{9.21}$$

Dabei ist

$$\mathbf{k} = k\mathbf{q}, \tag{9.22}$$

und ω und $\mathbf{k}$ hängen über die **Dispersionsrelation**

$$\omega^2 = k^2 c^2 \tag{9.23}$$

zusammen, wie man durch Einsetzen von (9.21) in die Wellengleichung (9.6) sofort sieht. Eine ebene Welle vom Typ (9.21) nennt man **monochromatisch**. Entsprechende Lösungen findet man für **A** und **B**.

Bemerkung: **E**, **A** und **B** sind reelle Vektorfelder nach Definition. Die komplexe Schreibweise in Gleichung (9.21) ist verabredungsgemäß so zu verstehen, daß das physikalische Vektorfeld durch den Realteil von (9.21) beschrieben wird. Die komplexe Schreibweise ist oft (z.B. beim Differenzieren) bequemer als die reelle; sie ist problemlos, solange nur lineare Operationen durchgeführt werden.

Bei der Berechnung physikalischer Größen wie etwa der Energiestromdichte treten Produkte von Vektorfeldern auf. Zeitliche Mittelwerte solcher Produkte kann man in komplexer Schreibweise wie folgt berechnen: Für zwei Vektorfelder

$$\mathbf{a}(\mathbf{r},t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \qquad \mathbf{b}(\mathbf{r},t) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{9.24}$$

gilt für den zeitlichen Mittelwert des Produktes

$$\overline{(}Re\mathbf{a})\cdot(Re\mathbf{b}) = \frac{1}{2}Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^*), \tag{9.25}$$

denn in

$$(Re\mathbf{a})\cdot(Re\mathbf{b}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a}_0\exp(-i\omega t) + \mathbf{a}_0^*\exp(i\omega t))(\mathbf{b}_0\exp(-i\omega t) + \mathbf{b}_0^*\exp(i\omega t)) \tag{9.26}$$

verschwinden die gemischten Terme mit den Zeitfaktoren $\exp(\pm 2i\omega t)$ nach Zeitmittelung und es bleibt

$$\overline{(}Re\mathbf{a})\cdot(Re\mathbf{b}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b}) = \frac{1}{2}Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^*). \tag{9.27}$$

Terminologie: Der Betrag k des **Wellenvektors k** heißt **Wellenzahl** und ist über

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{9.28}$$

mit der **Wellenlänge** λ verknüpft. Mit (9.23) folgt

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{9.29}$$

für den Zusammenhang der **Kreisfrequenz** ω mit der **Schwingungsdauer** τ. Anstelle von ω wird auch oft die **Frequenz** $\nu = \omega/(2\pi)$ benutzt. Anhand von (9.21) sieht man, daß τ die zeitliche Periodizität der Welle bei festgehaltenem Ort **r** beschreibt,

$$\exp(i\omega(t+\tau)) = \exp(i\omega t + 2\pi i) = \exp(i\omega t); \tag{9.30}$$

analog gibt λ die räumliche Periodizität an:

$$\exp(ik(z+\lambda)) = \exp(ikz + 2\pi i) = \exp(ikz) \tag{9.31}$$

für eine Welle in z-Richtung zu fester Zeit t.

Die Größe

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \tag{9.32}$$

nennt man die **Phase** der Welle. Unter der **Phasengeschwindigkeit** v_{ph} versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpunkt mit vorgegebener fester Phase bewegt. Um v_{ph} zu bestimmen, betrachten wir wieder eine ebene Welle in z-Richtung und bilden das totale Differential von $\phi(z,t)$:

$$d\phi = k dz - \omega dt. \tag{9.33}$$

Für $\phi = \text{const.}$ folgt dann:

$$v_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c; \tag{9.34}$$

die Phasengeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit c.

Bemerkung: Streng genommen ist eine ebene Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt; jede praktisch realisierbare Welle dagegen begrenzt. Die ebene Welle ist jedoch eine sinnvolle Approximation, wenn die Ausdehnung der realen Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung groß ist im Vergleich zu irgendwelchen *Hindernissen* (z.B. Spalte), durch die sie *gestört* werden kann.

Für monochromatische ebene Wellen gehen die Beziehungen

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{9.35}$$

in der komplexen Darstellung über in

$$\mathbf{B} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{A}); \quad \mathbf{E} = i\omega \mathbf{A}. \tag{9.36}$$

Mit (9.36) und (9.25) lassen sich Energie und Impuls der Welle leicht ausrechnen: Für den zeitlichen Mittelwert

$$\omega_F = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \omega_F \, dt \tag{9.37}$$

der Energiedichte (reelle Darstellung)

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{9.38}$$

erhält man mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$:

$$\overline{\omega}_F = \frac{\epsilon_0}{4} Re(\omega^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* + c^2 k^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*) = \frac{\epsilon_0}{2} \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2. \tag{9.39}$$

Entsprechend für die Energiestromdichte (8.14)

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{\omega}{2\mu_0} |\mathbf{A}_0|^2 \, \mathbf{k} = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \, \mathbf{q} \tag{9.40}$$

und direkt über (8.30) für die Impulsdichte

$$\overline{\vec{\pi}}_F = \frac{\epsilon_0}{2c} |\mathbf{E}_0|^2 \, \mathbf{q} = \frac{1}{c^2} \overline{S}. \tag{9.41}$$

Vergleicht man (9.39) mit (9.41), so findet man, daß die Energie mit der Geschwindigkeit c transportiert wird. Im Gegensatz zu $\omega_F, \mathbf{S}$ und $\vec{\pi}_F$ ist der zeitliche Mittelwert der Drehimpulsdichte, Gleichung (8.39), ortsabhängig und zur Charakterisierung einer ebenen Welle ungeeignet. Der Drehimpuls des Feldes hat jedoch Bedeutung für sphärische Wellen, wo er eine analoge Rolle spielt wie der Impuls für die ebene Welle.

9.4 Polarisation

Wegen der Transversalität und der Orthogonalität von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ können wir eine monochromatische ebene Welle der Form (9.21) beschreiben durch:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_0 \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)); \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_2 B_0 \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)) \tag{9.42}$$

mit

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{9.43}$$

Eine solche Welle nennt man **linear polarisiert**. Eine zu (9.42) *gleichberechtigte*, linear unabhängige ebene Welle zu gleichem Wellenvektor $\mathbf{k}$ erhält man, indem man $\mathbf{E}$ in $\mathbf{e}_2$-Richtung und $\mathbf{B}$ in $\mathbf{e}_1$-Richtung wählt. Der allgemeine Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle ergibt sich dann nach dem Superpositionsprinzip, z.B. für das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2)\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)) \tag{9.44}$$

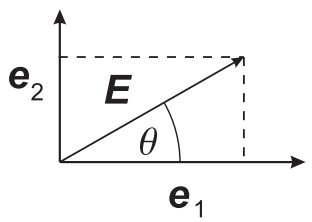
mit E_l (l = 1,2) als beliebigen komplexen Zahlen $E_l = |E_l|\exp(i\phi_l)$. Gleichung (9.44) beschreibt alle möglichen Polarisationszustände:

1.) **Lineare Polarisation** liegt vor, wenn

$$\phi_1 = \phi_2. \tag{9.45}$$

Richtung und Betrag von $\mathbf{E}$ sind dann gegeben durch (s. Skizze)

$$\theta = \arctan(\frac{E_2}{E_1}); \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \tag{9.46}$$



2.) **Zirkuläre Polarisation**:

$$E_1 = E_2; \quad \phi_1 - \phi_2 = \pm\frac{\pi}{2}; \tag{9.47}$$

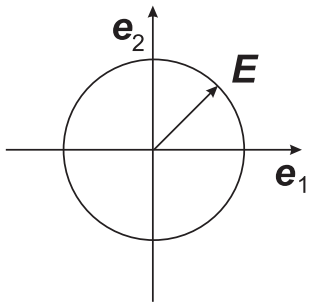
dann wird nämlich

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)), \tag{9.48}$$

oder in reeller Darstellung

$$E_x = E_0\cos(kz - \omega t); E_y = \mp E_0\sin(kz - \omega t), \tag{9.49}$$

wenn $\mathbf{k}$ in z-Richtung zeigt. Der Drehsinn ist durch die Wahl des Vorzeichens in (9.48) festgelegt; man erhält links- bzw. rechts-zirkulare Polarisation.



3.) **Elliptische Polarisation** tritt auf für

$$E_1 \neq E_2; \quad \phi_1 - \phi_2 \neq 0. \tag{9.50}$$

$\mathbf{E}$ beschreibt dann für festes z eine Ellipsenbahn, deren Lage relativ zu $\mathbf{e}_1$ durch $\phi_1 - \phi_2$ und deren Hauptachsenverhältnis durch E_1/E_2 bestimmt ist.

Kapitel 10

Wellenpakete im Vakuum

10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen

Ein wichtiger Anwendungsbereich elektromagnetischer Strahlung ist die Informationsübertragung. Monochromatische ebene Wellen sind dazu ungeeignet, da sie praktisch keine Information außer ihrer Periode (ω) vermitteln können. Man kann monochromatische ebene Wellen jedoch **modulieren** und so Information übertragen. Im einfachsten Fall bildet man eine Überlagerung aus 2 monochromatischen Wellen:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_1 t) + f_0 \cos(\omega_2 t) \tag{10.1}$$

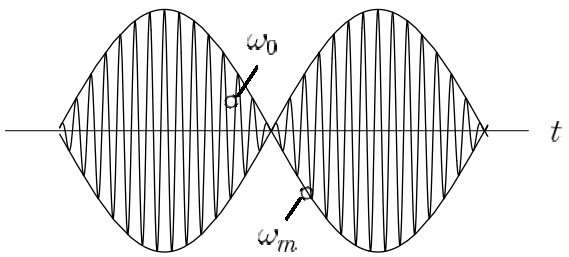
beschreibe die Welle an einem festen Ort. (10.1) kann als **amplituden-modulierte Schwingung** dargestellt werden:

$$f(t) = 2f_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) \tag{10.2}$$

mit

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{10.3}$$

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ gewählt wird, dann ist (10.2) eine fast harmonische Schwingung der Frequenz ω_0 (**Trägerfrequenz**), deren Amplitude sich mit der **Modulationsfrequenz** ω_m ändert. Man erhält das Bild einer *Schwebung*.



Kompliziertere Schwingungsformen und damit mehr Möglichkeiten zur Informationsübertragung ergeben sich durch Überlagerung mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen.

10.2 Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Ausgehend von einer **Grundfrequenz** $\omega = 2\pi/T$ bildet man

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-i\omega_n t); \quad \omega_n = n\omega. \tag{10.4}$$

Die **Fourier-Reihe** (10.4) konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise), wenn $f(t)$ periodisch mit der Periode T und stückweise glatt ist. Die (schwächere) Forderung der Konvergenz im quadratischen Mittel ist erfüllt für periodische, in $[0, T]$ stetige Funktionen $f(t)$.

Die **Fourier-Koeffizienten** f_n lassen sich bei gegebener Funktion $f(t)$, welche obigen Voraussetzungen genügt, wie folgt berechnen:

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(i\omega_n t)\ dt. \tag{10.5}$$

Beweis: Mit (ÜB)

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega(m-n)t)\ dt = \delta_{mn} \tag{10.6}$$

wird:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(i\omega_m t)\ dt = T \sum_n f_n \delta_{mn} = T\ f_m. \tag{10.7}$$

Nicht-periodische Funktionen lassen sich (unter sehr schwachen Voraussetzungen, s.u.) durch **Fourier-Integrale** darstellen, die sich aus (10.4) im Limes $T \to \infty$ ergeben.

Führt man den Abstand $\Delta\omega = 2\pi/T$ benachbarter Frequenzen ω_n ein und definiert man

$$\tilde{f}(\omega_i) = \lim_{T\to\infty} (\frac{T}{2\pi} f_i), \tag{10.8}$$

so kann man

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega_n) \exp(-i\omega_n t)\ \Delta\omega \tag{10.9}$$

als **Riemann-Summe** des **Fourier-Integrals**

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t)\ d\omega \tag{10.10}$$

auffassen. Für die Umkehrung von (10.10) zeigt der Vergleich von (10.5) und (10.8):

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t)\ dt. \tag{10.11}$$

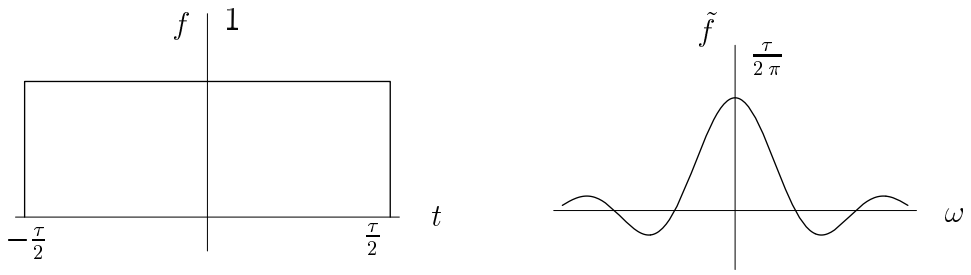
$\tilde{f}(\omega)$ heißt die **Fourier-Transformierte** zu $f(t)$. Sie existiert und (10.10) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrablen Funktionen $f(t)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt < \infty; \tag{10.12}$$

$\tilde{f}(\omega)$ ist dann auch quadratintegrabel.

Beispiel: Rechteckimpuls

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \quad f(t) = 0 \quad \text{sonst.} \tag{10.13}$$



Dann wird

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(i\omega t)\, dt = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\exp(i\omega t)}{2i} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\pi\omega}. \tag{10.14}$$

Die Breite $\Delta\omega$ von $\tilde{f}(\omega)$ schätzt man aus obiger Figur ab zu:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{oder} \quad \Delta\omega\Delta t \approx 2\pi. \tag{10.15}$$

Je schmaler (breiter) das Signal $f(t)$ werden soll, desto breiter (schmaller) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt. Diese **Unschärferelation** ist nicht an das Beispiel (10.13) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fourier-Transformation.

Bemerkung: Oft wird die Fourier-Transformation in der symmetrischen Form

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t)\, d\omega \tag{10.16}$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t)\, dt \tag{10.17}$$

benutzt.

Das oben skizzierte Verfahren der Fourier-Transformation wenden wir nun auf die

10.3 Spektrale Zerlegung ebener Wellen

an. Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion $f(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - ct)$, welche eine ebene Welle darstellt, lautet:

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i\omega_n \xi/c) \tag{10.18}$$

mit

$$\xi = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - ct, \quad \omega_n = n\omega \tag{10.19}$$

und die Fourier-Koeffizienten sind gegeben durch:

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi c} \int_{-\pi c/\omega}^{\pi c/\omega} f(\xi) \exp(-i\omega_n \xi/c)\ d\xi. \tag{10.20}$$

Für aperiodische ebene Wellen benutzt man das Fourier-Integral:

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(i\omega\xi/c)\ d\omega \tag{10.21}$$

mit der Umkehrung

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp(-i\omega\xi/c)\ d\xi/c. \tag{10.22}$$

Die räumliche bzw. zeitliche Ausdehnung der Welle ist dann bestimmt durch:

$$\Delta\xi\Delta\omega \approx 2\pi c, \tag{10.23}$$

nämlich

$$\Delta t\Delta\omega \approx 2\pi \tag{10.24}$$

für einen festen Ort $\mathbf{r}$ und zu fester Zeit t:

$$\Delta z\Delta k \approx 2\pi, \tag{10.25}$$

falls die Welle in z-Richtung läuft.

Bemerkung: Wichtig im Hinblick auf Informationsübertragung ist die Eigenschaft ebener Wellenpakete der Form (10.21), daß sie ihre Form beibehalten und nicht *zerfließen* (siehe Quantenmechanik):

$$f(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r} + \mathbf{q}ct, t), \tag{10.26}$$

da f nur vom Argument ξ (10.19) abhängt. Diese Eigenschaft gilt nicht mehr für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie!

10.4 δ-Distribution

Die Fourier-Transformation (10.10), (10.11) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man (10.11) in (10.10) ein, so muß (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i\omega(t-t'))d\omega dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')\ dt' \tag{10.27}$$

mit

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(t-t'))\ d\omega \tag{10.28}$$

für beliebige quadratintegrable Funktionen $f(t)$ gelten. Die hier eingeführte Größe $\delta(t-t')$ ist offensichtlich keine gewöhnliche Funktion, sondern eine **Distribution**, welche streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbinding mit der Integration in (10.27) erklärt ist.

Die δ-Distribution, als deren Definition wir im folgenden (10.27) betrachten wollen, kann durch jede Folge stetiger Funktionen δ_n, für die

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta_n(t-t')\ dt' = f(t) \tag{10.29}$$

gilt, dargestellt werden.

Beispiele:
1.) Rechteck

$$\delta_n(t) = n \quad \text{für} \quad |t| < \frac{n}{2}; \quad \delta_n(t) = 0 \quad \text{sonst.} \tag{10.30}$$

2.) Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) = n\exp(-\pi t^2 n^2). \tag{10.31}$$

3.) Die Darstellung

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nt)}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} \exp(i\omega t)\ d\omega \tag{10.32}$$

führt gerade auf die Schreibweise (10.28).

Vorsicht: Die Gleichungen (10.29) - (10.32) sind so zu verstehen, daß die t'-Integration **vor** der Limes-Bildung $n \to \infty$ auszuführen ist!

Rechenregeln:(ÜB)

1.) $\delta(t) = \delta(-t)$

2.) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

3.) $\delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(t+a) + \delta(t-a)); \quad a \neq 0$.

10.5 Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung; Wellenpakete

Die in Kap. 10.3 untersuchten ebenen Wellen sind zwar zeitlich und räumlich in ihrer Ausbreitungsrichtung begrenzt, nicht jedoch in der Ebene senkrecht dazu. Sie stellen keine praktisch realisierbaren Signale zur Informationsübertragung dar, da ihre Erzeugung wegen der unendlichen flächenhaften Ausdehnung eine unendlich große Energie erfordern würde. Signale endlicher Energie erhält man nur für raum-zeitlich begrenzte Felder (**Wellenpakete**), die wir aus monochromatischen ebenen Wellen durch Superposition aufbauen

können. Ausgehend von den beiden Basislösungen $\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)$ zu festem $\mathbf{k}$ bilden wir z.B. für das Vektorpotential (in der Erweiterung der Fourier-Transformation auf 3 Dimensionen)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ [\mathbf{A}_+(\mathbf{k})\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t))+\mathbf{A}_-(\mathbf{k})\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega t))]; \quad (10.33)$$

wegen (9.23) erfaßt (10.33) alle möglichen ω-Werte. Um zu einer reellen Funktion $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ zu gelangen, ersetzen wir im 2. Term in (10.33) $\mathbf{k}$ durch $-\mathbf{k}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ [\mathbf{A}_+(\mathbf{k})\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t))+\mathbf{A}_-(-\mathbf{k})\exp(-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t))]. \quad (10.34)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ wird rell, wenn

$$\mathbf{A}_+(\mathbf{k})=\mathbf{A}_-^*(-\mathbf{k})=\mathbf{A}(\mathbf{k}), \quad (10.35)$$

also

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ [\mathbf{A}(\mathbf{k})\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t))+\mathbf{A}^*(\mathbf{k})\exp(-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t))]. \quad (10.36)$$

Damit haben wir die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung (9.7) gewonnen. Dabei verlangt die Coulomb-Eichung

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{k})=0. \quad (10.37)$$

Wichtig für den Aufbau der Quantenmechanik, welche das elektromagnetische Feld durch **Photonen** beschreibt, ist die Eigenschaft, daß Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes sich additiv aus den Beiträgen der monochromatischen ebenen Wellen zusammensetzen. Wir demonstrieren dies für den Fall der Energie. Dazu schreiben wir (10.36) noch einmal um,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ [\mathbf{A}(\mathbf{k},t)+\mathbf{A}^*(-\mathbf{k},t)]\ \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \quad (10.38)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{A}(\mathbf{k},t)=\mathbf{A}(\mathbf{k})\exp(-i\omega t);\qquad \mathbf{A}^*(-\mathbf{k},t)=\mathbf{A}^*(-\mathbf{k})\exp(i\omega t). \quad (10.39)$$

Dann wird nach (8.10)

$$W=\int\omega_F\ d^3r=\int[\frac{\epsilon_0}{2}(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})^2+\frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\mathbf{A})^2]d^3r \quad (10.40)$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^3}\int d^3r\int d^3k\int d^3k'[\frac{\epsilon_0}{2}(-i\omega\mathbf{A}(\mathbf{k},t)+i\omega\mathbf{A}^*(-\mathbf{k},t))(-i\omega'\mathbf{A}(\mathbf{k}',t))+i\omega'\mathbf{A}^*(-\mathbf{k}',t))$$

$$+\frac{1}{2\mu_0}(i\mathbf{k}\times\mathbf{A}(\mathbf{k},t)+i\mathbf{k}\times\mathbf{A}^*(-\mathbf{k},t))(i\mathbf{k}'\times\mathbf{A}(\mathbf{k}',t))+i\mathbf{k}'\times\mathbf{A}^*(-\mathbf{k}',t))]\exp(i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}),$$

wobei [....] noch von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{k}'$ abhängt. Nach Ausführen der Integration $\int d^3r$ erhalten wir wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\ \exp(i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r})=\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \quad (10.41)$$

und $\delta(\mathbf{k}) = \delta(k_x)\delta(k_y)\delta(k_z)$ nur Beiträge für $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ und damit $\omega = \omega'$:

$$W = \frac{\epsilon_0}{8}\int d^3k\ [(\omega)^2(\mathbf{A}(\mathbf{k},t) - \mathbf{A}^*(-\mathbf{k},t))(\mathbf{A}(-\mathbf{k},t)) - \mathbf{A}^*(\mathbf{k},t)) \tag{10.42}$$

$$-(ikc)^2(\mathbf{A}(\mathbf{k},t) + \mathbf{A}^*(-\mathbf{k},t))(\mathbf{A}(-\mathbf{k},t)) + \mathbf{A}^*(\mathbf{k},t))]$$

$$= \frac{\epsilon_0}{4}\int d^3k\ \omega^2[\mathbf{A}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{A}^*(\mathbf{k}) + \mathbf{A}^*(-\mathbf{k})\cdot\mathbf{A}(-\mathbf{k})] = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3k\ \omega^2[\mathbf{A}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{A}^*(\mathbf{k})];$$

dabei wurde benutzt

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{k},t) = -i\omega\mathbf{A}(\mathbf{k},t) \tag{10.43}$$

und

$$\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = i(\mathbf{k}\times\mathbf{A}(\mathbf{k},t))\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{10.44}$$

sowie (10.37) und $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$.

Gleichung (10.42) beschreibt die Feldenergie als Summe (Integral) der Einzelbeiträge (9.39) der beteiligten monochromatischen Wellen. Sie stellt zusammen mit den entsprechenden Gleichungen für Impuls und Drehimpuls die Grundlage für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch unabhängige *Teilchen* (**Photonen**) dar. W ist selbst zeitunabhängig in Einklang mit der Energieerhaltung.

Kapitel 11

Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

11.1 Problemstellung

Bei Anwesenheit von Ladungen haben wir die inhomogenen Gleichungen (vgl. (7.13, (7.14))

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \tag{11.1}$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{11.2}$$

mit der Nebenbedingung (Lorentz-Konvention)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{11.3}$$

zu lösen. Das Problem ist also die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung

$$\Box \Psi(\mathbf{r}, t) = -\omega(\mathbf{r}, t), \tag{11.4}$$

wo Ψ für Φ, A_i und ω für ρ, j_i steht. Die allgemeine Lösung von (11.4) setzt sich aus der (in Kap. 10 diskutierten) allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (9.9) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammen. Zur Konstruktion einer speziellen Lösung von (11.4) benutzen wir die Methode der **Green'schen Funktionen**: Mit der Definition der Green'schen Funktion:

$$\Box G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\ \delta(t - t') \tag{11.5}$$

können wir as (formale) Lösung angeben:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')\ \omega(\mathbf{r}', t')\ d^3 r' dt', \tag{11.6}$$

wie man durch Einsetzen von (11.6) in (11.4) direkt bestätigt. Babei wird ohne (die an sich nötigen) Skrupel die Reihenfolge von Integration bzgl. $\mathbf{r}', t'$ und Differentiation bzgl. $\mathbf{r}, t$ vertauscht. Zur

11.2 Konstruktion von G

notieren wir zunächst 2 fundamentale Eigenschaften von G:

$$G = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \tag{11.7}$$

aufgrund der Invarianz von (11.5) gegen Raum- und Zeit-Translationen;

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = 0 \qquad \text{für } t < t' \tag{11.8}$$

wegen des Kausalitätsprinzips.

Wir betrachten als Vorübung den (schon bekannten) Fall statischer Felder, z.B. des elektrostatischen Feldes. Die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \tag{11.9}$$

hat als (spezielle) Lösung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r', \tag{11.10}$$

das Coulomb-Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. (11.10) können wir schreiben als

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\ \rho(\mathbf{r}')\ d^3r' \tag{11.11}$$

mit der Green'schen Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{11.12}$$

welche die Differentialgleichung

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{11.13}$$

erfüllt. **Beweis**:
i) $R \neq 0$, wo

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \tag{11.14}$$

Dann wird:

$$\Delta(\frac{1}{R}) = \nabla\cdot(\nabla\frac{1}{R}) = -\nabla\cdot(\frac{\mathbf{R}}{R^3}) = -\frac{1}{R^3}\nabla\cdot\mathbf{R} + \frac{3}{R^4}(\mathbf{R}\cdot\frac{\mathbf{R}}{R}) = -\frac{3}{R^3} + \frac{3}{R^3} = 0, \quad \text{q.e.d.} \tag{11.15}$$

ii) Wegen (11.15) kann man in einem Volumenintegral vom Typ

$$\int f(\mathbf{R})\Delta(\frac{1}{R})\, d^3R \tag{11.16}$$

den Integrationsbereich auf eine kleine Kugel vom Radius a mit Mittelpunkt bei $R = 0$ beschränken,

$$\int f(\mathbf{R})\Delta(\frac{1}{R})\, d^3R = \lim_{a\to 0} \int_{\text{Kugel(a)}} f(\mathbf{R})\Delta(\frac{1}{R})\, d^3R. \tag{11.17}$$

Ist f stetig um 0, so kann man f aus dem Integral herausziehen

$$\int f(\mathbf{R})\Delta(\frac{1}{R})\; d^3R = \lim_{a\to 0} f(\mathbf{R}=0)\int_{\text{Kugel(a)}} \Delta(\frac{1}{R})\; d^3R \tag{11.18}$$

und erhält nach dem Gauß'schen Satz:

$$\int_{\text{Kugel(a)}} \Delta(\frac{1}{R})\; d^3R = \int_{\text{Kugel(a)}} \nabla\cdot(\nabla(\frac{1}{R}))\; d^3R \tag{11.19}$$

$$= \int_{F(a)} (\nabla(\frac{1}{R}))\cdot d\mathbf{f} = -\int_{F(a)} \frac{1}{R^2} R^2 d\Omega = -4\pi.$$

Also:

$$\int f(\mathbf{R})\Delta(\frac{1}{R})\; d^3R = -4\pi f(0). \tag{11.20}$$

Da (11.5) die Wellengleichung für eine zeitlich und räumlich punktförmige Quelle darstellt, muß $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}';t-t')$ eine Kugelwelle darstellen, welche den Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit $t = t' + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ erreicht, wenn die sie auslösende Störung zur Zeit t' am Ort $\mathbf{r}'$ stattfindet. Wir machen also den Ansatz:

$$G(\mathbf{R},\tau) = \frac{g(\tau - R/c)}{R} \tag{11.21}$$

mit $\tau = t - t'$. Zur Bestimmung von g setzen wir (11.21) in (11.5) ein und bilden:

$$\Delta G = g\Delta(\frac{1}{R}) + \frac{1}{R}\Delta g + 2\nabla(\frac{1}{R})\cdot\nabla g = -4\pi g\;\delta(\mathbf{R}) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}g + \frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}g - \frac{2}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}g; \tag{11.22}$$

dabei wurde benutzt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \qquad \text{Winkelanteil} \tag{11.23}$$

und

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial R}\cdot\frac{x}{R} \quad \text{etc.} \tag{11.24}$$

Damit wird

$$\Box G = -4\pi g\;\delta(\mathbf{R}), \tag{11.25}$$

da

$$\frac{1}{R}(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2})g(\tau - R/c) = 0 \tag{11.26}$$

für beliebige (differenzierbare) Funktionen $g(\tau - R/c)$. Der Vergleich mit (11.5) ergibt:

$$4\pi g(\tau - R/c) = \delta(\tau - R/c) \tag{11.27}$$

also:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';t-t') = \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \qquad \text{für } t > t' \tag{11.28}$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';t-t') = 0 \qquad \text{für } t < t'.$$

Bemerkung:

Bei der Herleitung von (11.27) wurde die Differenzierbarkeit von g vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist in der Tat erfüllt, da die δ-Distribution (beliebig oft) differenziert werden darf in dem Sinne daß :

$$\int f(x)\delta^{(n)}(x)\ dx = (-)^n \int f^{(n)}\delta(x)\ dx; \tag{11.29}$$

dabei ist vorausgesetzt, daß f (beliebig oft) differenzierbar ist.

Interpretation von G:
Die Inhomogenität in (11.5) stellt eine punktförmige Quelle dar, welche zur Zeit t' am Ort $\mathbf{r}'$ für eine (infinitesimal) kurze Zeit angeschaltet wird. Die von dieser Quelle hervorgerufene Störung breitet sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c aus. Es muß also gelten:
i) Die Kugelwelle G muß für $t < t'$ nach dem Kausalitätsprinzip verschwinden.
ii) Sie muß am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ ankommen, da elektromagnetische Wellen sich mit der (endlichen) Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ausbreiten.
iii) Da die Energie der Welle auf einer Kugeloberfläche verteilt ist, sollte G asymptotisch wie R^{-1} verschwinden.

Die **retardierte** Green'sche Funktion (11.28) erfüllt genau diese Forderungen. Gleichung (11.6) zeigt, wie man die Potentiale $\mathbf{A}, \Phi$ zu gegebener Quellen-Verteilung $\rho, \mathbf{j}$ aus den Beiträgen für punktförmige Quellen aufbauen kann.

11.3 Retardierte Potentiale

Mit (11.6) und (11.28) lauten die (asymptotisch verschwindenden) Lösungen von (11.1) und (11.2) für lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\ d^3r'dt' \tag{11.30}$$

und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\ d^3r'dt'. \tag{11.31}$$

Die Lösungen (11.30) und (11.31) sind über (11.3) bzw. die Ladungserhaltung (6.3) miteinander verknüpft. Die Ausführung der Integrationen in (11.30) und (11.31) wollen wir an Hand von 2 praktisch wichtigen Spezialfällen untersuchen; dabei werden wir besonders auf die im Argument der δ-Distribution enthaltende Retardierung achten.

Vernachlässigt man die Retardierung in (11.30) und (11.31),

$$\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \to \delta(t - t'), \tag{11.32}$$

so erhält man *quasistationäre Felder*:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\ d^3r', \tag{11.33}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r', \tag{11.34}$$

welche in der Theorie elektrischer Netzwerke und Maschinen auftreten. Die Näherung (11.32) ist gerechtfertigt, wenn ρ und $\mathbf{j}$ sich während der Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Distanz $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ zurückzulegen, (praktisch) nicht ändert.

Wir betrachten nun

Beipiel 1: zeitlich periodische Quellen-Verteilungen der Form

$$\rho = \rho(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t). \tag{11.35}$$

Dann folgt aus (11.30), (11.31):

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r})\exp(-i\omega t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{11.36}$$

mit $(k = \omega/c)$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r', \tag{11.37}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{11.38}$$

Die zugehörigen Differentialgleichungen ergeben sich aus (11.1), (11.2) und (11.35) zu:

$$(\Delta + k^2)\Psi(\mathbf{r}) = -\gamma(\mathbf{r}), \tag{11.39}$$

wo Ψ für Φ, A_i und γ für ρ, j_i steht. Die Lösungen (11.37) und (11.38) können wir dann mit der zu (11.39) gehörenden Green'schen Funktion

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';k) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{11.40}$$

schreiben als

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int \gamma(\mathbf{r}')\; G(\mathbf{r},\mathbf{r}';k)\; d^3r'. \tag{11.41}$$

Die Diskussion der Integrale (11.37), (11.38) werden wir in Kapitel 12 wieder aufgreifen.

Beispiel 2: Felder bewegter Punktladungen.

Für eine sich auf der Bahn $\mathbf{r}(t)$ bewegende Punktladung q können wir schreiben:

$$\rho = q\;\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)); \quad \mathbf{j} = q\;\mathbf{v}(t)\;\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)). \tag{11.42}$$

Dann kann in (11.30) die $\mathbf{r}'$ - Integration ausgeführt werden:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}(t'))\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'dt' \tag{11.43}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(t-t'-|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(t')|}dt',$$

analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}(t')\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|}\, dt'. \tag{11.44}$$

Zur Ausführung der t' - Integration benutzen wir (ÜB)

$$\int g(x)\ \delta(f(x))\ dx = \sum_i \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{11.45}$$

wobei x_i (einfache) Nullstellen von $f(x)$ seien. Dann wird:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{1}{R(t_i')\kappa(t_i')} \tag{11.46}$$

wobei

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'); \quad \kappa(t') = 1 - \frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')}{cR(t')} \tag{11.47}$$

und t_i' Lösungen von $t' - t + R(t')/c = 0$ sind. Analog:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{\mathbf{v}(t_i')}{R(t_i')\kappa(t_i')}. \tag{11.48}$$

Die Potentiale (11.46) und (11.48) (**Liénard - Wichert - Potentiale**) schreiben wir kurz als:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R\kappa})_{ret}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}(\frac{\mathbf{v}}{R\kappa})_{ret}. \tag{11.49}$$

Der Grenzfall $v \to 0$ ergibt

$$\mathbf{A} \to 0; \quad \Phi(\mathbf{r},t) \to \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \tag{11.50}$$

d.h. das Coulomb-Potential.

11.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen

Von Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen sprechen wir, wenn der Energiefluß durch die unendlich ferne Oberfläche nicht verschwindet,

$$\lim_{R\to\infty} \int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f} \neq 0. \tag{11.51}$$

Das bedeutet, daß die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ nicht stärker als R^{-1} abfallen dürfen, da die Oberfläche wie R^2 anwächst. Solche Felder nennt man **Strahlungsfelder** im Gegensatz zu den **statischen** Feldern, welche mit R^{-2} abfallen.

Wir wollen nun zeigen, daß beschleunigte Punktladungen **strahlen**; dazu müssen wir die zu (11.49) gehörenden Felder über

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{11.52}$$

berechnen, wobei wir für $\Phi, \mathbf{A}$ die Form (11.43), (11.44) benutzen wollen. Mit den Abkürzungen

$$\nabla f(R) = \mathbf{n}\frac{\partial f}{\partial R}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} \tag{11.53}$$

erhält man:

$$-\nabla\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int dt'\{\frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2}\delta(t'-t+\frac{R(t')}{c}) - \frac{\mathbf{n}(t')}{cR(t')}\delta'(t'-t+\frac{R(t')}{c})\} \tag{11.54}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi}\int dt'\frac{\mathbf{v}(t')}{R(t')}\,\delta'(t'-t+\frac{R(t')}{c})\}, \tag{11.55}$$

so daß

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int dt'\{\frac{\mathbf{n}(t')}{R(t')^2}\delta(t'-t+\frac{R(t')}{c}) + \frac{\mathbf{v}(t')/c-\mathbf{n}(t')}{cR(t')}\delta'(t'-t+\frac{R(t')}{c})\}. \tag{11.56}$$

Dabei bedeutet $\delta'(t'-t+R(t')/c)$ die in (11.29) erklärte Ableitung nach ihrem Argument $\xi = t'-t+R(t')/c$. Analog:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi}\int dt'\;(\mathbf{n}(t')\times\mathbf{v}(t'))\{\frac{1}{R(t')^2}\delta(t'-t+\frac{R(t')}{c}) - \frac{1}{cR(t')}\delta'(t'-t+\frac{R(t')}{c})\}. \tag{11.57}$$

Zur Ausführung der t' - Integration benutzen wir:

$$\delta'(\xi) = \frac{1}{\kappa(t')}\;\frac{d}{dt'}\delta(t'-t+\frac{R(t')}{c}) \tag{11.58}$$

mit $\kappa(t')$ aus (11.47). Mit (11.29), (11.45) sowie (11.49) wird dann:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\{\frac{\mathbf{n}(t)}{\kappa(t)R(t)^2} + \frac{1}{\kappa(t)c}\;\frac{d}{dt'}(\frac{-\mathbf{v}(t')/c+\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')R(t')})\}_{ret}. \tag{11.59}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\{\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{n}(t)}{\kappa(t)R(t)^2} + \frac{1}{\kappa(t)c}\;\frac{d}{dt'}(\frac{\mathbf{v}(t')\times\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')R(t')})\}_{ret}.$$

Um die Differentiation nach t' auszuführen bilden wir

$$-\frac{d\mathbf{n}}{dt'} = \frac{\mathbf{R}}{R^2}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v}}{R} = \frac{1}{R}[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}-\mathbf{v}] \tag{11.60}$$

und

$$\frac{d}{dt'}(\kappa R) = \frac{v^2}{c} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} - \frac{R}{c}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}) \tag{11.61}$$

mit $\mathbf{b} = d/dt'\mathbf{v}$. Setzen wir (11.60),(11.61) in (11.59) ein und ordnen wir nach Potenzen von R^{-1}, so erhalten wir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\{\frac{1}{c^2\kappa^3 R}[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}) - \kappa\mathbf{b}]\}_{ret} + \quad O(R^{-2}); \tag{11.62}$$

Die letzteren Terme sind im Hinblick auf die Ausstrahlungsbedingung (11.51) uninteressant. Entsprechend für $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\{\frac{1}{c^2\kappa^3 R}[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{v}\times\mathbf{n}) - \kappa c\ (\mathbf{n}\times\mathbf{b})]\}_{ret} + \quad O(R^{-2}). \tag{11.63}$$

Zur Berechnung der Energiestromdichte benutzen wir die Identität

$$\mathbf{n}\times((\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})\times\mathbf{b}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}) - \kappa\mathbf{b} \tag{11.64}$$

sowie die Relation

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}), \tag{11.65}$$

welche für den asymptotischen Bereich direkt aus (11.62), (11.63) folgt, sich jedoch auch für die uns im folgenden nicht interessierenden R^{-2} - Terme beweisen läßt. Wir finden dann für den Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{E}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E})}{\mu_0 c} = \frac{1}{\mu_0 c}(\mathbf{n}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})) = \frac{\mathbf{n}}{\mu_0 c}E^2 \tag{11.66}$$

mit (11.62) und (11.64):

$$\mathbf{S} = \frac{q^2\mathbf{n}}{16\pi^2\epsilon_0 c^3\kappa^6 R^2}(\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c})\times\mathbf{b}])^2. \tag{11.67}$$

Da $|\mathbf{S}| \sim R^{-2}$, ist die Ausstrahlungsbedingung (11.51) erfüllbar und wir haben das Ergebnis, daß beschleunigte Punktladungen, $\mathbf{b} \neq 0$, strahlen. Daß gradlinig, gleichförmig bewegte Punktladungen ($\mathbf{b} = 0$) nicht strahlen, folgt ohne jede Rechnung aus dem Relativitätsprinzip: Das Ruh-System der Punktladung ist dann ein Inertialsystem, in dem das elektrische Feld das Coulomb-Feld ist und das magnetische Feld, per Definition, verschwindet, so daß $\mathbf{S} = 0$ wird.

Beispiele:
1.) Bremsstrahlung: entsteht, wenn ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem äußeren Feld abgebremst wird (z.B. beim Aufprall auf ein Target). Daraus resultiert das kontinuierliche **Röntgenspektrum**.
2.) Synchrotron-Strahlung:
Die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen ist auch eine beschleunigte Bewegung. Die dabei entstehende Strahlung ist ein wesentliches Problem bei zyklischen Teilchenbeschleunigern (Synchrotron); ein Teil der zugeführten Energie geht durch Strahlung *verloren*.
3.) Strahlungsdämpfung:
Im klassischen Atommodell bewegen sich die gebundenen Elektronen auf Kreis- bzw. Ellipsenbahnen um den Atomkern. Dabei strahlen sie als beschleunigte Ladungen kontinuierlich elektromagnetische Wellen ab. Der resultierende Energieverlust führt zu instabilen Bahnen und schließlich zum Kollaps des Atoms im klassischen Modell. Dieser Widerspruch zur experimentellen Beobachtung wird erst in der Quantentheorie bzw. Quantenelektrodynamik (QED) aufgelöst.

Kapitel 12

Multipolstrahlung

12.1 Langwellen-Näherung

Für eine Quellen-Verteilung der Form

$$\rho = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \tag{12.1}$$

hatten wir in Kap. 11.3 gefunden:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \tag{12.2}$$

und ($k = \omega/c$)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r', \tag{12.3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r'.$$

Bei der Diskussion von (12.3) können wir uns im folgenden auf $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beschränken, da $\mathbf{A}$ und Φ direkt über die Lorentz-Konvention zusammenhängen: Aus

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{12.4}$$

folgt mit (12.2)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{c^2}{i\omega}\, \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \tag{12.5}$$

Zur weiteren Behandlung von (12.3) machen wir die **Langwellen - Näherung**

$$d \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}, \tag{12.6}$$

wo d den Radius einer Kugel angibt, welche die Ladungs- und Stromverteilung in ihrem Inneren enthält.

Beispiele:
Für die optische Strahlung von Atomen ist $d \approx 10^{-8}$ cm, $\lambda \approx 10^{-5}$ cm; analog für die γ-Strahlung von Atomkernen: $d \approx 10^{-13}$ cm, $\lambda \approx 10^{-11}$ cm.

Bei der Diskussion von (12.3) sind nun die Längen d, λ und r wesentlich. Wir untersuchen folgende Fälle:

Fall 1: $d < r \ll \lambda$ (**Nahzone**)
Dann ist

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1 \tag{12.7}$$

und wir erhalten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r', \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, d^3r'. \tag{12.8}$$

Der Ortsanteil der Potentiale zeigt nach (12.8) die gleiche Struktur wie in Elektro- und Magnetostatik. Angesichts der Zeitabhängigkeit (12.2) spricht man von **quasistatischen Feldern**, für die $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ wie R^{-2} abfallen, sodaß die Ausstrahlungsbedingung (11.51) nicht erfüllt ist.

Fall 2: $d \ll \lambda \ll r$ (**Fernzonen**)
Wegen

$$kr \gg 1 \tag{12.9}$$

können wir dann die Taylor-Reihe

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sum_n \frac{(-)^n}{n!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n r \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \cdots \tag{12.10}$$

in (12.3) benutzen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \cdots = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \{1 + (\frac{1}{r} - ik)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}') + \cdots\} \tag{12.11}$$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \{1 - i\frac{\omega}{c}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}')\}$$

mit $k = \omega/c$ und dem Richtungsvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{12.12}$$

12.2 Elektrische Dipol - Strahlung

Im ersten Term in (12.11)

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3r'\, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \tag{12.13}$$

können wir wie folgt umformen:

$$\int_V j_i \; d^3r' = \int_V \nabla' \cdot (x_i' \mathbf{j}) \; d^3r' - \int_V x_i' (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \; d^3r' \tag{12.14}$$

$$= \int_F x_i' (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}') - \int_V x_i' (\nabla' \cdot \mathbf{j}) \; d^3r' = -i\omega \int_V x_i' \rho(\mathbf{r}') \; d^3r',$$

da wegen der Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0. \tag{12.15}$$

Mit (1.29) wird dann:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \; \frac{\exp(ikr)}{r} \; \mathbf{d}, \tag{12.16}$$

wobei wesentlich das elektrische Dipolmoment $\mathbf{d}$ eingeht.

Für die Felder folgt, wenn man (12.9) beachtet und sich auf Terme $\sim r^{-1}$ beschränkt:

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi c} \; \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} \; (\mathbf{e} \times \mathbf{d}). \tag{12.17}$$

Mit

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -i \frac{\mu_0 c}{4\pi} \; \omega \frac{\exp(ikr)}{r} \; (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}) \tag{12.18}$$

folgt aus (7.5) für das $\mathbf{E}$-Feld:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_0(\mathbf{r}) - \frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{d} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{d})) = c \; (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{e}), \tag{12.19}$$

wenn man $\mathbf{e} \times \mathbf{d} \times \mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{d})$ ausnutzt. Wir sind nun in der Lage, die Energiestromdichte

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{e}) \times \mathbf{B}_0 = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{e} B_0^2 - \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e}) \tag{12.20}$$

zu berechnen. Wir benutzen die Realteile von (12.17) und (12.19) und finden mit (12.2) sowie $(\mathbf{e} \times \mathbf{d} \times \mathbf{e}) \times (\mathbf{e} \times \mathbf{d}) = \mathbf{e} d^2 \sin^2\theta$:

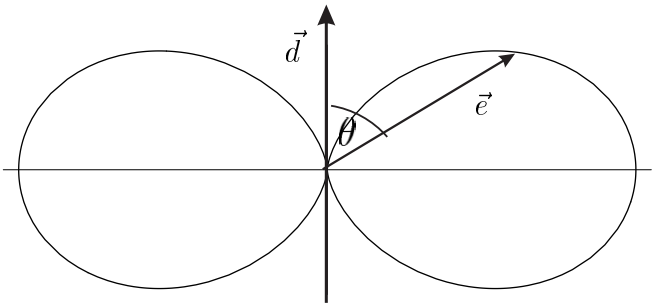
$$\mathbf{S}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \sin^2\theta \; \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \mathbf{e}, \tag{12.21}$$

wobei θ der von $\mathbf{e}$ und $\mathbf{d}$ eingeschlossene Winkel ist. Für den zeitlichen Mittelwert folgt:

$$\overline{\mathbf{S}}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \; \frac{\sin^2\theta}{2r^2} \mathbf{e}. \tag{12.22}$$

Der Dipol strahlt also nicht in Richtung von $\mathbf{d}$ ($\theta = 0$), sondern maximal senkrecht zu $\mathbf{d}$ ($\theta = 90^0$). Die $\sin^2\theta$ - Abhängigkeit ist charakteristisch für Dipolstrahlung.

Bemerkungen:
1.) Charakteristisch für Strahlungsfelder ist ihre Eigenschaft, daß $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{S}$ ein orthogonales Dreibein bilden (vgl. Kap. 9.3).
2.) Ein (mit der Frequenz ω) oszillierender Dipol ist nur durch beschleunigte Punktladungen realisierbar. (12.22) ist also konform mit der allgemeinen Aussage (11.67).



3.) Die Strahlung niedrigster Multipolarität ist Dipol-Strahlung (l=1), nicht Monopol-Strahlung (l=0)! In der Quantentheorie wird gezeigt, wie die Multipolarität der Strahlung und der Drehimpuls der Photonen zusammenhängen. Da Photonen einen Eigendrehimpuls haben (*Spin* 1), gibt es keine *drehimpuls-freie* Strahlung, d.h. Monopol-Strahlung. Der Spin der Photonen ist direkt verknüpft mit der Tatsache, daß Strahlungsfelder Vektor-Felder sind.

12.3 Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupol - Strahlung

Der 2. Term der Entwicklung (12.11) lautet

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}')\; d^3r'; \tag{12.23}$$

das verbleibende Integral ist bestimmt durch das magnetische Dipolmoment und den elektrischen Quadrupoltensor. Um dies zu sehen, benutzen wir die Identität:

$$(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\times\mathbf{j})\times\mathbf{e} + \frac{1}{2}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{j})\mathbf{r}'\}, \tag{12.24}$$

welche den Integranden in (12.23) in einen bzgl. $\mathbf{r}'$ antisymmetrischen und symmetrischen Anteil zerlegt. Mit der Definition (4.39) des magnetischen Dipolmoments wird der antisymmetrische Anteil:

$$\mathbf{A}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{m}\times\mathbf{e}). \tag{12.25}$$

Der magnetische Dipol-Anteil des Vektorpotentials geht formal in den elektrischen Dipol-Anteil (12.16) über, wenn man

$$\frac{1}{c}(\mathbf{m}\times\mathbf{e}) \to \mathbf{d} \tag{12.26}$$

ersetzt. Damit kann man aus (12.17) und (12.19) für die Feldstärken sofort ablesen:

$$\mathbf{B}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{e}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{e})) \tag{12.27}$$

und

$$\mathbf{E}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = c\;(\mathbf{B}_1^{(m)}\times\mathbf{e}). \tag{12.28}$$

Analog (12.22) findet man für die im Zeitmittel abgestrahlte Energie:

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(m)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3}\omega^4 m^2 \frac{\sin^2\theta}{2r^2}\mathbf{e}, \tag{12.29}$$

wo θ jetzt der Winkel zwischen $\mathbf{m}$ und $\mathbf{e}$ ist. Der Vergleich von (12.29) und (12.22) zeigt, daß sich elektrische und magnetische Dipol-Strahlung in ihrer Frequenz- und Winkelabhängigkeit nicht unterscheiden. Der einzige Unterschied liegt in der **Polarisation**: für einen elektrischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes in der von $\mathbf{e}$ und $\mathbf{d}$ aufgespannten Ebene, für einen magnetischen Dipol senkrecht zu der von $\mathbf{e}$ und $\mathbf{m}$ aufgespannten Ebene.

Wir befassen uns nun mit dem 2. Term in (12.24), der auf

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\exp(ikr)}{2r}\int\{\mathbf{j}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{e}\cdot\mathbf{j})\}\; d^3r' \tag{12.30}$$

führt. Das Integral in (12.30) kann nun auf den in Kap. 1.5 eingeführten elektrischen Quadrupoltensor zurückgeführt werden. Analog (12.14) formen wir um:

$$\begin{aligned}\int_V j_i x'_m \; d^3r' &= \int_V x'_m \nabla'\cdot(x'_i\mathbf{j})\; d^3r' - \int_V x'_m x'_i(\nabla'\cdot\mathbf{j})\; d^3r' \\ &= -\int_V x'_i j_m \; d^3r' - i\omega\int_V x'_m x'_i\rho(\mathbf{r}')\; d^3r',\end{aligned} \tag{12.31}$$

wobei eine partielle Integration (1. Term) und die Ladungserhaltung (2. Term) benutzt wurden. Also:

$$\int_V\{j_i x'_m + x'_i j_m\}d^3r' = -i\omega\int_V x'_m x'_i\rho\; d^3r', \tag{12.32}$$

und wir können (12.30) schreiben als:

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\;\omega^2\;\frac{\exp(ikr)}{2r}\;\int(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\; d^3r'. \tag{12.33}$$

Für die Felder folgt bei Beachtung von (12.9)

$$\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = ik\;(\mathbf{e}\times\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r})) \tag{12.34}$$

und

$$\mathbf{E}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = i\frac{c^2}{\omega}\;\nabla\times\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = c\;(\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r})\times\mathbf{e}), \tag{12.35}$$

da im ladungsfreien Raum gilt:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{12.36}$$

Mit Hilfe des Quadrupoltensors, gegeben durch seine Komponenten

$$Q_{mn} = \int_V\rho(\mathbf{r}')\{x'_m x'_n - \frac{1}{3}r'^2\delta_{mn}\}\; d^3r', \tag{12.37}$$

erhalten wir für $\mathbf{B}_1^{(e)}$ den Ausdruck:

$$\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -i\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\;\omega^3\;\frac{\exp(ikr)}{2r}\;(\mathbf{e}\times\mathbf{Q}), \tag{12.38}$$

wobei der Vektor $\mathbf{Q}$ die Komponenten

$$Q_m = \sum_{n=1}^{3} Q_{mn} e_n \tag{12.39}$$

hat. Man beachte, daß der 2. Term in (12.37) zu (12.38) keinen Beitrag liefert!

Wie oben berechnen wir nun die Energiestromdichte

$$\mathbf{S}_1^{(e)} = \frac{1}{\mu_0}(\Re\mathbf{E}_1^{(e)} \times \Re\mathbf{B}_1^{(e)}) = \frac{c}{\mu_0}(\Re\mathbf{B}_1^{(e)} \times \mathbf{e}) \times \Re\mathbf{B}_1^{(e)}, \tag{12.40}$$

woraus mit

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \tag{12.41}$$

folgt

$$\mathbf{S}_1^{(e)} = \frac{c}{\mu_0}(\Re\mathbf{B}_1^{(e)})^2\mathbf{e} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3}\ \omega^6\ \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{4r^2}(\mathbf{e} \times \mathbf{Q})^2\mathbf{e}. \tag{12.42}$$

Nach Zeitmittelung wird

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(e)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3}\omega^6 \frac{1}{8r^2}(\mathbf{e} \times \mathbf{Q})^2\mathbf{e}. \tag{12.43}$$

Der Unterschied zur Dipolstrahlung bzgl. der Frequenzabhängigkeit ist offensichtlich. Zur Diskussion der Winkelabhängigkeit betrachten wir den Fall der **Axialsymmetrie** (vgl. Kap. 1.5)

$$Q_{mn} = 0 \quad \text{für } m \neq n; \qquad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2} = -\frac{Q_0}{3}. \tag{12.44}$$

In

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{Q})^2 = Q^2 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q})^2 \tag{12.45}$$

wird dann

$$Q^2 = \frac{Q_0^2}{9}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{4}{9}Q_0^2 e_3^2 = \frac{Q_0^2}{9}(\sin^2\theta + 4\cos^2\theta) \tag{12.46}$$

sowie

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} = -\frac{Q_0}{3}\sin^2\theta + \frac{2}{3}Q_0\cos^2\theta; \tag{12.47}$$

also

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{Q})^2 = Q_0^2 \sin^2\theta\cos^2\theta. \tag{12.48}$$

Ergebnis:

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(e)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3}\ \omega^6\ \frac{Q_0^2}{8r^2}\sin^2\theta\cos^2\theta\ \mathbf{e}. \tag{12.49}$$

Die elektrische Quadrupolstrahlung unterscheidet sich von der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung sowohl in der Frequenzabhängigkeit als auch in der Winkelverteilung.

Anwendung in der Atom- und Kernphysik

Atome und Kerne können unter Emission bzw. Absorption von elektromagnetischer Strahlung ihren Zustand ändern. Die Multipolentwicklung ist die für diese Situation passende Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. In der Atomphysik dominiert in der Regel die Dipolstrahlung: Der Vergleich von (12.22) und (12.49) zeigt, daß elektrische Dipolstrahlung um einen Faktor der Größenordnung $(kd_0)^{-2}$ stärker ist als elektrische Quadrupolstrahlung. Die dominiert auch die magnetische Dipolstrahlung, von der sie sich nach (12.22) und (12.29) um den Faktor $(v/c)^2$ unterscheidet. Die Verhältnisse sind in der Kernphysik komplizierter. Eine genaue Diskussion ist hier nur im Rahmen der **Quantentheorie** möglich.

Wir wollen im folgenden die Multipolentwicklung in systematischer Form mit Hilfe von **Kugelfunktionen** beschreiben. Diese Klasse von Funktionen findet auch in anderen Gebieten der Physik vielfache Anwendung.

Ergänzung: Hinweis zur Herleitung von (12.34) bzw. (12.35) aus (12.33).

Mit den Abkürzungen

$$f(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\,\omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r}, \qquad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int d^3r'\ (\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}') \tag{12.50}$$

wird:

$$\mathbf{B}_1^{(e)} = (\nabla f)\times\mathbf{v} + f\ \nabla\times\mathbf{v} = ikf(\mathbf{r})(\mathbf{e}\times\mathbf{v}) + O(r^{-2}) = ik(\mathbf{e}\times\mathbf{A}_1^{(e)}) + O(r^{-2}), \tag{12.51}$$

da alle Ableitungen von der Ordnung $O(r^{-1})$ sind. Entsprechend verfährt man in (12.35) bei der Berechnung von $\mathbf{E}_1^{(e)}$.

Kapitel 13

Systematik der Multipolentwicklung

Wir beginnen mit einer erneuten Diskussion der

13.1 Multipolentwicklung statischer Felder

Für eine lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ können wir das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d^3r' \tag{13.1}$$

in genügend großer Entfernung von den Ladungen ($r \gg r'$) mit Hilfe einer Taylor-Reihe darstellen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \{\rho(\mathbf{r}')\ \sum_n \frac{(-)^n}{n!}(\mathbf{r}'\cdot\nabla)^n \frac{1}{r}\}\, d^3r' \tag{13.2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}')\ \{\frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2 - r^2r'^2}{2r^5} + \cdots\}$$

Die Entwicklung (13.2) schreiben wir nun um auf **Kugelkoordinaten**

$$x = r\sin\theta\cos\phi; \quad y = r\sin\theta\sin\phi; \quad z = r\cos\theta \tag{13.3}$$

$$x' = r'\sin\theta'\cos\phi'; \quad y' = r'\sin\theta'\sin\phi'; \quad z' = r'\cos\theta'.$$

In diesen Koordinaten läßt sich (13.2) wie folgt darstellen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{q_{lm}}{\epsilon_0(2l+1)} Y_{lm}(\theta,\phi)\ \frac{1}{r^{l+1}} \tag{13.4}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_{lm} = \int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}')r'^l\ Y^*_{lm}(\theta',\phi'). \tag{13.5}$$

Erläuterungen:
1.) Da die Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ in (13.2) in völlig symmetrischer Weise (über das Skalarprodukt $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')$) eingehen, muß $\Phi(\mathbf{r})$ in gleicher Weise von θ,ϕ wie von θ',ϕ' abhängen. Das Auftreten der konjugiert komplexen Funktion Y^*_{lm} werden wir weiter unten begründen.
2.) Der Index $l \geq 0$ klassifiziert das asymptotische Verhalten der einzelnen Terme in der Taylor-Reihe.
3.) Der Index m numeriert die Komponenten der Multipolmomente zu festem l. Zu jedem l treten $2(l+1)$ Werte $-l, -l+1, ..., l-1, l$ von m auf. Im 2. Term der Entwicklung z.B. werden die 3 Komponenten des Dipolmoments $\mathbf{d}$ mit $m = -1, 0, +1$ erfaßt.

Wie der Vergleich von (13.2) und (13.4) zeigt, haben die niedrigsten Funktionen Y_{lm} folgende Gestalt:

$$l = 0: \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{13.6}$$

$$l = 1: \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\ \exp(i\phi)$$

$$l = 2: \quad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\ \exp(2i\phi); \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\ \exp(i\phi);$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}),$$

wenn wir die Festlegung

$$Y_{l-m}(\theta,\phi) = (-)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi) \tag{13.7}$$

treffen. Die in (13.4) auftretende Kombination

$$Y_{lm}(\theta,\phi)\ Y^*_{lm}(\theta',\phi') + Y_{l-m}(\theta,\phi)\ Y^*_{l-m}(\theta',\phi')$$

ist damit reell und bzgl. (θ,ϕ) und (θ',ϕ') symmetrisch.

Die niedrigsten Entwicklungskoeffizienten q_{lm} lauten mit (13.6), (13.7):

$$l = 0: \quad q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}Q$$

mit

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}')\ d^3r' \tag{13.8}$$

als der Gesamtladung.

$$l = 1: \quad q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}')(x' - iy') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(d_x - id_y);$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}')z' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}d_z,$$

wobei d_x, d_y, d_z die Komponenten des Dipolmoments $\mathbf{d}$ sind.

$$l = 2: \quad q_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\int d^3r'\ \rho(\mathbf{r}')(x' - iy')^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(Q_{11} - Q_{22} - 2iQ_{12});$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3r' \ \rho(\mathbf{r}')z'(x' - iy') = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13} - iQ_{23});$$

$$q_{20} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3r' \ \rho(\mathbf{r}')(z'^2 - \frac{r'^2}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}.$$

Dazu tritt wegen (13.7)

$$q_{lm} = (-)^m q^*_{l-m}. \tag{13.9}$$

13.2 Allgemeine Eigenschaften der Kugelfunktionen

Außerhalb des Bereichs, in dem sich Ladungen befinden, muß (13.4) die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \tag{13.10}$$

erfüllen. Da die Potenzen r^{-l-1} zu verschiedenen l-Werten und die Funktionen $\exp(im\phi)$ zu verschiedenen m-Werten linear unabhängig sind, folgt aus (13.10):

$$\Delta(r^{-l-1}Y_{lm}(\theta, \phi)) = 0. \tag{13.11}$$

Der Δ-Operator hat in Kugelkoordinaten die Form:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}). \tag{13.12}$$

Führt man die r-Differentiationen in (13.11) aus, so bleibt

$$\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + l(l+1)\}Y_{lm} = 0. \tag{13.13}$$

Mit dem Separationsansatz

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \exp(im\phi) \ F_{lm}(\theta) \tag{13.14}$$

reduziert sich (13.13) auf

$$\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + l(l+1)\}F_{lm} = 0. \tag{13.15}$$

Bemerkungen:
1.) Neben $r^{-l-1}Y_{lm}(\theta, \phi)$ ist auch $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ eine Lösung von (13.10),

$$\Delta(r^l Y_{lm}(\theta, \phi)) = 0. \tag{13.16}$$

Von diesen beiden linear unabhängigen Lösungen ist in unserem Zusammenhang nur $r^{-l-1}Y_{lm}$ brauchbar wegen der Randbedingung

$$\Phi(r, \theta, \phi) \to 0 \qquad \text{für } r \to \infty. \tag{13.17}$$

2.) Der Index m in (13.14) muß ganzzahlig sein, da Φ eine eindeutige periodische Funktion ist:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \Phi(r,\theta,\phi+2\pi). \tag{13.18}$$

Zur Lösung von Gleichung (13.15) führen wir ein:

$$\xi = \cos\theta; \qquad \text{d.h.} \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{d\xi}, \tag{13.19}$$

sodaß (13.15) übergeht in:

$$\{\frac{d}{d\xi}((1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}) - \frac{m^2}{1-\xi^2} + l(l+1)\}F_{lm} = 0. \tag{13.20}$$

Für $l = m$ kann man die Lösung (bis auf einen Normierungsfaktor) sofort angeben:

$$F_{ll} = (1-\xi^2)^{l/2} = (\sin\theta)^l. \tag{13.21}$$

Die Lösungen zu $m \neq l$ erhält man dann rekursiv (bis auf einen Normierungsfaktor) aus:

$$F_{lm-1} = (-\frac{d}{d\theta} - m \ \ \mathrm{cotg}\theta)F_{lm}. \tag{13.22}$$

Der Beweis (durch Einsetzen von (13.22) in (13.15)) ist ebenso elementar wie langwierig. Wichtig am Resultat (13.22) ist, daß die F_{lm} Polynome in $\cos\theta, \sin\theta$ der Ordnung l sind, da Differentiation nach θ und Multiplikation mit $\mathrm{cotg}\theta$ die Ordnung von F_{ll} nicht ändern. Für alle m-Werte mit $|m| > l$ verschwindet F_{lm}.

Bemerkung:
Gleichung (13.20) hat außer der hier behandelten Lösung als Differentialgleichung 2. Ordnung noch eine 2. Basislösung. Sie besitzt Singularitäten für $\theta = 0, \pi$ und ist für unsere Problemstellung nicht geeignet.

Eine wichtige Eigenschaft der Kugelfunktionen ist die **Orthogonalität**. Um sie zu formulieren, betrachten wir eine Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$, welche im Intervall $[a,b]$ stetig sein sollen. Wir definieren dann das **Skalarprodukt** zweier Funktionen f_n, f_m durch

$$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m^* f_n \, dx. \tag{13.23}$$

Als die **Norm** von f_n wird eingeführt:

$$(f_n, f_n) = \int_a^b |f_n|^2 \, dx \geq 0. \tag{13.24}$$

Man nennt 2 Funktionen **orthogonal** wenn

$$(f_m, f_n) = 0. \tag{13.25}$$

Die obigen Begriffsbildungen sind analog zu denen für Vektoren in Vektorräumen endlicher Dimension.

Für die Kugelfunktionen gilt nun folgende Relation

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \; Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{13.26}$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} d\phi \; \exp(i(m-m')\phi) = 2\pi \qquad \text{für } m = m' \tag{13.27}$$

und $=0$ für $m \neq m'$ ist die Orthogonalität bzgl. m sofort klar. Die auf 1 normierten Funktionen sind dann

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\phi). \tag{13.28}$$

Für die Funktionen $F_{lm}(\theta)$ verzichten wir auf die Berechnung der (in (13.21), (13.22) noch nicht enthaltenen) Normierungsfaktoren. Die Orthogonalität bzgl. l weisen wir wie folgt nach: Wir nutzen aus, daß die Lösung der reellen Differentialgleichung (13.20) stets reell gewählt werden kann und bilden von

$$\int_{-1}^{+1} d\xi \; F_{l'm}\{\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{1-\xi^2} + l(l+1)\}F_{lm} = 0 \tag{13.29}$$

und

$$\int_{-1}^{+1} d\xi \; F_{lm}\{\frac{d}{d\xi}(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{1-\xi^2} + l'(l'+1)\}F_{l'm} = 0 \tag{13.30}$$

die Differenz und erhalten

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^{+1} d\xi \; F_{l'm}F_{lm} = 0; \tag{13.31}$$

dabei wurde der 1. Term in (13.29) (oder (13.30)) durch 2-malige partielle Integration umgeformt und beachtet, daß wegen des Faktors $(1-\xi^2)$ keine Beiträge von den ausintegrierten Termen auftreten. Für $l \neq l'$ folgt aus (13.31)

$$\int_{-1}^{+1} d\xi \; F_{l'm}F_{lm} = 0, \qquad \text{q.e.d.} \tag{13.32}$$

13.3 Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes

Die Multipollösungen von Kap. 12 im quellenfreien Raum genügen der Differentialgleichung

$$\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0. \tag{13.33}$$

Sie besitzt außer ebenen Wellen auch Kugelwellen als Lösungen, die wir im folgenden konstruieren wollen.

Mit dem Ansatz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_{lm} \; f_l(r) \; Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{13.34}$$

geht (13.33) über in

$$\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\} f_l(r) = 0, \tag{13.35}$$

wenn man (13.12) und (13.13) beachtet. Gleichung (13.35) wird etwas einfacher, wenn man statt f_l die Funktion

$$g_l = r f_l \tag{13.36}$$

einführt, wofür dann gilt

$$\{\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\} g_l(r) = 0. \tag{13.37}$$

Fall 1: l=0
Dann sind die Lösungen g_0 sofort ersichtlich: $\sin(kr)$ und $\cos(kr)$ bzw. $\exp(\pm ikr)$.
Fall 2: $l \neq 0$
In der Variablen

$$\rho = kr \tag{13.38}$$

lautet (13.37)

$$\{\frac{d^2}{d\rho^2} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\} g_l(\rho) = 0. \tag{13.39}$$

Zur Lösung von (13.39) definieren wir

$$d_l^+ = \frac{d}{d\rho} - \frac{l}{\rho}; \quad d_l^- = \frac{d}{d\rho} + \frac{l}{\rho}; \tag{13.40}$$

dann läßt sich (13.39) schreiben als

$$(d_l^+ d_l^- + 1) g_l = 0, \tag{13.41}$$

wenn man beachtet:

$$\frac{d}{d\rho}(\frac{l}{\rho} g_l) = -\frac{l}{\rho^2} g_l + \frac{l}{\rho}\frac{dg_l}{d\rho}. \tag{13.42}$$

Ähnlich ist:

$$(d_{l+1}^- d_{l+1}^+ + 1) g_l = 0. \tag{13.43}$$

Wendet man auf (13.43) die *Vorschrift* d_{l+1}^+ an,

$$(d_{l+1}^+ d_{l+1}^- + 1)(d_{l+1}^+ g_l) = 0 \tag{13.44}$$

und vergleicht mit (13.41), so erhält man (bis auf einen konstanten Faktor)

$$g_{l+1} = d_{l+1}^+ g_l. \tag{13.45}$$

Gleichung (13.45) erlaubt also, die g_l rekursiv aus g_0 zu berechnen.

Lösungsübersicht:

g_0	$(-)^l g_l(\rho)/\rho$	Symbol
$\sin\rho$	sphärische Bessel-Funktionen	$j_l(\rho)$
$-\cos\rho$	sphärische Neumann-Funktionen	$n_l(\rho)$
$\exp(\pm i\rho)$	sphärische Hankel-Funktionen	$h_l^{\pm}(\rho)$

Zur einfachen Berechnung der niedrigsten j_l, n_l schreiben wir (13.40) um,

$$d_l^+ = \rho^l \frac{d}{d\rho} \rho^{-l}, \tag{13.46}$$

sodaß nach (13.45)

$$g_l = \rho^l \frac{d}{d\rho} \rho^{-l} \cdots \rho \frac{d}{d\rho} \rho^{-1} g_0 \tag{13.47}$$

oder

$$\frac{g_l}{\rho} = \rho^l (\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho})^l (\frac{g_0}{\rho}). \tag{13.48}$$

Man findet durch einfache Differentiationen (ÜB):

$$j_0 = \frac{\sin\rho}{\rho}; \quad n_0 = -\frac{\cos\rho}{\rho};$$

$$j_1 = \frac{\sin\rho}{\rho^2} - \frac{\cos\rho}{\rho}; \quad n_1 = -\frac{\cos\rho}{\rho^2} - \frac{\sin\rho}{\rho};$$

$$j_2 = (\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}) \sin\rho - \frac{3\cos\rho}{\rho^2}; \quad n_2 = (-\frac{3}{\rho^3} + \frac{1}{\rho}) \cos\rho - \frac{3\sin\rho}{\rho^2}.$$

Die allgemeine Lösung von (13.33) kann nun geschrieben werden als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \{\mathbf{a}_{lm} h_l^+(\rho) + \mathbf{b}_{lm} h_l^-(\rho)\} \; Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{13.49}$$

Für Abstrahlungsprobleme ist $\mathbf{b}_{lm} = 0$, da h_l^- eine *einlaufende* Kugelwelle beschreibt. Die Koeffizienten $\mathbf{a}_{lm}$ der *auslaufenden* Kugelwelle h_l^+ werden bestimmt aus den Multipolmomenten durch Vergleich von (13.49) und (12.11) für $\rho = kr \gg 1$.

13.4 Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen

Die Funktionen $h_l^\pm(\rho) Y_{lm}(\theta, \phi)$ bilden wie die ebenen Wellen $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ eine vollständige Basis; die allgemeine Lösung der Wellengleichung kann aus der einen wie der anderen Basis durch Superposition gewonnen werden. Welche Basis man wählt, hängt von der speziellen Problemstellung (z.B. den Randbedingungen) ab.

Den Zusammenhang der beiden Basis-Systeme wolen wir aufzeigen durch Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelfunktionen. Der Einfachheit halber wählen wir $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, dann tritt in

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(ikz) = \exp(ikr\cos\theta) \tag{13.50}$$

der Winkel ϕ nicht mehr auf und die Entwicklung hat die Form:

$$\exp(ikz) = \sum_l a_l \; j_l(kr) \; Y_{l0}(\theta). \tag{13.51}$$

Die Neumann-Funktionen treten nicht auf, da n_l singulär wird für $r \to 0$. Die Koeffizienten lauten:

$$a_l = i^l(2l+1)\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}. \tag{13.52}$$

Zum **Beweis** von (13.52) nutzt man die Orthogonalität aus. Generell kann man die Koeffizienten einer Entwicklung

$$g(x) = \sum_m c_m f_m(x) \tag{13.53}$$

nach einem (vollständigen) orthonormierten System von Funktionen $f_m(x)$,

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm} \tag{13.54}$$

bestimmen durch

$$c_n(f_n, g) = \int_a^b f_n^*(x) g(x)\ dx. \tag{13.55}$$

Im obigen Beispiel (13.49) wird:

$$a_l j_l(kr) = \int_0^\pi \sin\theta d\theta\ Y_{l0}(\theta) \exp(ikr\cos\theta); \tag{13.56}$$

nach Entwicklung für kleine Werte von r kann die θ-Integration durchgeführt werden. Das Ergebnis ist (13.52) (ÜB).

13.5 Nutzen der Entwicklung nach Kugelfunktionen

Kennt man die Winkelabhängigkeit der Funktionen Φ, Gleichung (13.4), bzw. $\mathbf{A}$, Gleichung (13.49), bei festem r, so kann man sofort entscheiden, welche Multipolmomente die Quelle des Feldes enthält. Zum Beispiel wird

$$(Y_{lm}, \Phi) \sim q_{lm} \tag{13.57}$$

wegen der Orthogonalität der Y_{lm}, welche erlaubt, aus der Entwicklung (13.4) einen bestimmten Term *herauszugreifen*.

Teil V

Das elektromagnetische Feld in Materie

Kapitel 14

Makroskopische Felder

Im Prinzip erlauben die Maxwell-Gleichungen von Teil III das elektromagnetische Feld beliebiger Materieanordnungen zu berechnen, sobald die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ exakt bekannt sind. In einer solchen *mikroskopischen* Theorie wird die gesamte Materie in dem betrachteten Raumbereich in Punktladungen (Elektronen und Atomkerne) zerlegt, deren Bewegungszustand dann Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r},t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ definiert. Für Materieanordnungen von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. Kondensator mit Dielektrikum oder stromdurchflossene Spule mit Eisenkern) ist eine *mikroskopische* Rechnung in der Praxis weder durchführbar noch erstrebenswert, da experimentell doch nur räumliche und zeitliche Mittelwerte der Felder kontrollierbar sind. Wir werden uns daher im folgenden mit raum-zeitlichen Mittelwerten befassen.

14.1 Makroskopische Mittelwerte

sind Integrale der Form

$$< f(\mathbf{r},t) >= \frac{1}{\Delta V \Delta T} \int dV d\tau \; f(\mathbf{r}+\vec{\xi}, t+\tau) \tag{14.1}$$

wobei,
i) ΔV das Volumen, ΔT das Zeitintervall angibt, über das gemittelt wird,
ii) f für die Ladungs- oder Stromdichte und die Komponenten der Feldstärken steht. Wir wollen im folgenden Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten (14.1) für Ladungs- und Stromdichte einerseits und den Feldern andererseits herstellen. Ausgangspunkt sind die **mikroskopischen** Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{14.2}$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}. \tag{14.3}$$

Wenn wir annehmen, daß in (14.1) Differentiationen nach $\mathbf{r}$ und t unter dem Integral ausgeführt werden dürfen,

$$\frac{\partial}{\partial t} < f >=< \frac{\partial f}{\partial t} >; \quad \frac{\partial}{\partial x} < f >=< \frac{\partial f}{\partial x} >; \quad \frac{\partial}{\partial y} < f >=< \frac{\partial f}{\partial y} >; \quad \text{etc.}, \tag{14.4}$$

so erhalten wir aus (14.2) und (14.3) folgende Gleichungen für die Mittelwerte:

$$\nabla\cdot < \mathbf{B} >= 0; \quad \nabla\times < \mathbf{E} > + \frac{\partial < \mathbf{B} >}{\partial t} = 0 \tag{14.5}$$

und

$$\nabla\cdot < \mathbf{E} >= \frac{< \rho >}{\epsilon_0}; \quad \nabla\times < \mathbf{B} > -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial < \mathbf{E} >}{\partial t} = \mu_0 < \mathbf{j} > . \tag{14.6}$$

Die homogenen Gleichungen (14.2) bleiben beim Übergang von den **mikroskopischen** Feldern $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ zu den **makroskopischen** Feldern

$$\vec{\mathcal{E}} =< \mathbf{E} >; \quad \vec{\mathcal{B}} =< \mathbf{B} > \tag{14.7}$$

erhalten. In den inhomogenen Gleichungen (14.6) müssen wir nun $< \rho >$ und $< \mathbf{j} >$ geeignet aufteilen in

14.2 Freie und gebundene Ladungsträger

Wir befassen uns zunächst in (14.6) mit dem Zusammenhang von $\vec{\mathcal{E}}$ und seinen Quellen. Dazu zerlegen wir

$$< \rho >= \rho_b + \rho_f, \tag{14.8}$$

wobei ρ_b die im Sinne von (14.1) gemittelte Dichte der **gebundenen** Ladungsträger darstellt, ρ_f die gemittelte Dichte der **freien** Ladungsträger.

Gebundene Ladungsträger sind z.B. die Gitterbausteine eines Ionen-Kristalls (wie $NaCl$ mit den Gitterbausteinen Na^+ und Cl^-) oder die Elektronen von Atomen und Molekülen. Gebunden bedeutet dabei nicht, daß die Ladungsträger total unbeweglich sind, sondern nur, daß sie durch starke rücktreibende Kräfte an bestimmte *Gleichgewichtslagen* gebunden sind, um die herum kleine Schwingungen möglich sind.

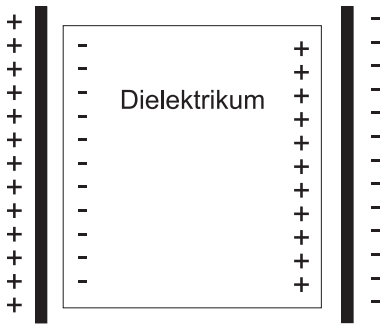
Frei bewegliche Ladungsträger sind z.B. Leitungselektronen in Metallen, Ionen in Gasen oder Elektrolyten. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß sie unter dem Einfluß eines äußeren Feldes einen makroskopischen Strom bilden.

ρ_f ist im Gegensatz zu ρ_b eine makroskopische, im Experiment direkt kontrollierbare Größe. Die Ladungen auf den Platten eines Kondensators z.B. können *von außen* vorgegeben werden. Sie erzeugen ein elektrisches Feld, welches in einem Dielektrikum zwischen den Platten elektrische Dipole erzeugen oder ausrichten kann. Der Effekt für den Beobachter sind **Polarisationsladungen** auf den Oberflächen des Dielektrikums, welche von den speziellen Gegebenheiten (Art des Dielektrikums, Temperatur der Umgebung, Stärke des $\vec{\mathcal{E}}$-Feldes) abhängen.
Es liegt daher nahe, das von den (gebundenen) Polarisationsladungen resultierende zusätzliche elektrische Feld mit dem Feld zusammenzufassen, welches von den Ladungen ρ_f auf den Platten herrührt. Das Zusatzfeld $\vec{\mathcal{P}}$ wählen wir so, daß :

$$\nabla\cdot\vec{\mathcal{P}} = -\rho_b \tag{14.9}$$

und

$$\vec{\mathcal{P}} = 0 \qquad \text{wo } \rho_b = 0. \tag{14.10}$$



Dann wird:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}) = \rho_f \tag{14.11}$$

oder nach Einführung der **dielektrischen Verschiebung**

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \tag{14.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f . \tag{14.13}$$

Wir werden weiter unten zeigen, daß das *Hilfsfeld* $\vec{\mathcal{P}}$ gerade die Dichte des (makroskopischen) Dipolmoments des betrachteten Dielektrikums ist (**dielektrische Polarisation**).

Vorher wollen wir jedoch noch die 2. inhomogene Gleichung in (14.6) umformen. Analog zu (14.8) teilen wir auf:

$$< \mathbf{j} >= \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b, \tag{14.14}$$

wobei $\mathbf{j}_f$ die von der Bewegung der freien Ladungsträger herrührende (gemäß (14.1) gemittelte) Stromdichte ist. Die von der Bewegung der gebundenen Ladungsträger herrührende (gemittelte) Stromdichte $\mathbf{j}_b$ teilt man zweckmäßigerweise noch einmal auf,

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M . \tag{14.15}$$

Dabei soll $\mathbf{j}_P$ von der zeitlichen Änderung von $\vec{\mathcal{P}}$, also der Bewegung der Polarisationsladungen, herrühren:

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}. \tag{14.16}$$

Die Diskussion des verbleibenden Anteils $\mathbf{j}_M$, der von molekularen Kreisströmen, d.h. **magnetischen Dipolen**, herrührt, verschieben wir auf später.

Mit (14.12), (14.14) und (14.16) schreibt sich die 2. inhomogene Gleichung wie folgt:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \mathbf{j}_M . \tag{14.17}$$

Für die weitere Umformung von (14.17) nutzen wir die Kontinuitätsgleichung für die freien Ladungsträger aus:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \tag{14.18}$$

Dann folgt aus (14.13) und (14.18)

$$\nabla \cdot (\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \mathbf{j}_f) = 0, \tag{14.19}$$

sodaß der Vektor $\partial\vec{\mathcal{D}}/\partial t + \mathbf{j}_f$ sich als Rotation eines Vektors darstellen läßt, den wir mit $\vec{\mathcal{H}}$ bezeichnen,

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \mathbf{j}_f. \tag{14.20}$$

Mit (14.17) finden wir den Zusammenhang von $\vec{\mathcal{B}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$:

$$\nabla \times (\vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}) = \mu_0 \mathbf{j}_M. \tag{14.21}$$

Analog dem Vektor $\vec{\mathcal{P}}$ führen wir hier ein:

$$\mu_0 \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{B}} - \mu_0 \vec{\mathcal{H}}, \tag{14.22}$$

sodaß entsprechend (14.9):

$$\nabla \times \vec{\mathcal{M}} = \mathbf{j}_M; \quad \vec{\mathcal{M}} = 0 \ \text{ wo } \mathbf{j}_M = 0. \tag{14.23}$$

$\vec{\mathcal{M}}$ wird sich als die Dichte des (makroskopischen) magnetischen Dipolmoments (**Magnetisierung**) erweisen.

Bemerkungen:
1.) Ein mikroskopisches Analogon besitzen nur die Felder $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, nämlich $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ (vgl. (14.7)). $\vec{\mathcal{D}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$ sind nur *Hilfsfelder*, die wir einführen, um komplizierte elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie pauschal zu erfassen.
2.) Eine makroskopische Polarisation (oder Magnetisierung) kann zustande kommen dadurch, daß vorhandene elektrische (oder magnetische) Dipole im Feld *ausgerichtet* werden oder daß Dipole vom Feld *induziert* werden. Ohne äußeres Feld sind *permanente* Dipole statistisch verteilt und ergeben nach Mittelung über ein makroskopisches Volumen keine Polarsation (oder Magnetisierung).

Zusammenfassung der makroskopischen Feldgleichungen:
Homogene Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \tag{14.24}$$

Inhomogene Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \tag{14.25}$$

Verknüpfungen:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}; \quad \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}}. \tag{14.26}$$

Die Gleichungen (14.24), (14.25) haben formal die gleiche Struktur wie (14.2), (14.3). Sie können daher mit den gleichen Methoden gelöst werden.

Die Gleichungen (14.2), (14.3) reichen jedoch noch nicht aus, um - bei gegebem $\rho_f, \mathbf{j}_f$ - die 4 Felder $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{H}}$ eindeutig zu bestimmen. Dazu müssen wir die formalen Verknüpfungen (14.26) mit Hilfe spezieller Modelle für die betrachtete Materie in explizite **Materialgleichungen** umwandeln. Einfache Beispiele werden in den nächsten Kapiteln dazu diskutiert.

14.3 Polarisation und Magnetisierung

Zur Interpretation von Polarisation $\vec{\mathcal{P}}$ und Magnetisierung $\vec{\mathcal{M}}$ führen wir durch

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}; \quad \vec{\mathcal{E}} = -\nabla\tilde{\Phi} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \tag{14.27}$$

das makroskopische skalare Potential $\tilde{\Phi}$ und Vektor-Potential $\vec{\mathcal{A}}$ ein. Für sie gelten in Lorentz-Eichung die inhomogenen Wellengleichungen

$$-\Box\tilde{\Phi} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}), \tag{14.28}$$

$$-\Box\vec{\mathcal{A}} = \mu_0(\mathbf{j}_f + \nabla \times \vec{\mathcal{M}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t}). \tag{14.29}$$

Sie haben als spezielle Lösungen die retardierten Potentiale (vgl. Kap. 11.3)

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\{\int d^3r' \, \frac{\rho_f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int d^3r' \, \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\} \tag{14.30}$$

mit der retardierten Zeit $t' = t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Ebenso:

$$\vec{\mathcal{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\{\int d^3r' \, \frac{\mathbf{j}_f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int d^3r' \, \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}', t')/\partial t'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int d^3r' \, \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\}. \tag{14.31}$$

Den uns interessierenden Term in (14.30) formen wir mit partieller Integration um:

$$\int d^3r' \, \frac{\nabla' \cdot \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^3r' \, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{14.32}$$

wobei wir der Einfachheit halber die Retardierung vernachlässigen ($t = t'$). Für endlich ausgedehnte Materie tritt kein Oberflächenterm bei der partiellen Integration auf. Der Vergleich mit Kap. 12.2 oder 1.5 zeigt, daß $\vec{\mathcal{P}}$ die Bedeutung der Dichte des makroskopischen elektrischen Dipolmoments zukommt, wie oben schon behauptet. Ganz entsprechend wird bei Vernachlässigung der Retardierung ($t = t'$) aus dem letzten Term in (14.31):

$$\int d^3r' \, \frac{\nabla' \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\int d^3r' \, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{14.33}$$

Der Vergleich mit Kap. 5.4 oder 12.3 zeigt, daß $\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}, t)$ die Dichte des makroskopischen magnetischen Dipolmoments zukommt. Es entsteht dadurch, daß entweder *permanente* magnetische Dipole im Feld ausgerichtet werden oder durch das Feld *induziert* werden, wie im Fall der elektrischen Dipole.

Die Ladungserhaltung für die gebundenen Ladungsträger,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_b + \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = 0, \tag{14.34}$$

folgt aus (14.9), (14.14) sowie (14.16) und (14.23).

Kapitel 15

Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes

In Kap. 8 hatten wir Energie, Impuls und Drehimpuls des mikroskopischen Feldes eingeführt und dieses Konzept in Teil IV auf das Strahlungsfeld im Vakuum angewendet. Wir wollen im folgenden die Betrachtungen von Kap. 8 auf das makroskopische Feld übertragen.

15.1 Energie

Ausgangspunkt für die Energiebilanz in Kap. 8 war die von einem (mikroskopischen) Feld $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ an einem System geladener Massenpunkte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dW_M}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV. \tag{15.1}$$

Grundlage von (15.1) ist die Lorentz-Kraft, z.B. für eine Punktladung q:

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})), \tag{15.2}$$

deren magnetischer Anteil zu (15.1) keinen Beitrag liebert. Aus (15.2) erhält man mit (14.1) für die vom makroskopischen Feld $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ auf eine mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegte Probeladung q ausgeübte (mittlere) Kraft:

$$\vec{\mathcal{K}} = q(\vec{\mathcal{E}} + (\mathbf{v} \times \vec{\mathcal{B}})). \tag{15.3}$$

Die an den **freien** Ladungen der Dichte ρ_f vom makroskopischen Feld pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist dann analog (15.1):

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = \int \mathbf{j}_f \cdot \vec{\mathcal{E}} \, dV. \tag{15.4}$$

Die rechte Seite von (15.4) können wir mit (14.25) umformen zu:

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = \int (\vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}) \, dV. \tag{15.5}$$

Wie in Kap. 8 können wir (15.5) symmetrisieren mit Hilfe der Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{15.6}$$

und (14.24),

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}. \tag{15.7}$$

Man erhält:

$$\frac{d\mathcal{W}_M}{dt} = -\int dV \; \{\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}\}. \tag{15.8}$$

Der Vergleich mit (8.7) zeigt, daß

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \tag{15.9}$$

als Energiestromdichte des makroskopischen Feldes (Poynting-Vektor) zu deuten ist. Zur Interpretation der restlichen Terme betrachten wir die Näherung

linearer, isotroper Medien:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}; \quad \vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}. \tag{15.10}$$

Dann wird

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}) \tag{15.11}$$

und wir können analog (8.10) die Größe

$$\frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}) \tag{15.12}$$

als Energiedichte des makroskopischen Feldes interpretieren.

15.2 Impuls, Drehimpuls

Nach (15.3) ist

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = q(\vec{\mathcal{E}} + (\mathbf{v} \times \vec{\mathcal{B}})) \tag{15.13}$$

die Änderung des Impulses der Probeladung q im Feld $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$. Für die Impulsänderung eines Systems freier Ladungen, beschrieben durch $\rho_f, \mathbf{j}_f$, im Feld $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ folgt:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV \; (\rho_f \vec{\mathcal{E}} + (\mathbf{j}_f \times \vec{\mathcal{B}})). \tag{15.14}$$

Analog Kap. 8.2 formen wir (15.14) mit

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \tag{15.15}$$

um zu

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV \; (\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \times \vec{\mathcal{B}}). \tag{15.16}$$

Wir symmetrisieren (15.16) mit Hilfe von

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}, \tag{15.17}$$

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV \, \{\vec{\mathcal{E}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}) + \vec{\mathcal{H}}(\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}) + (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \times \vec{\mathcal{B}} + (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \times \vec{\mathcal{D}} - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}})\}. \tag{15.18}$$

Wie in Kap. 8 läßt sich dann

$$\vec{\mathcal{D}} \times \vec{\mathcal{B}} \tag{15.19}$$

als Impulsdichte des makroskopischen elektromagnetischen Feldes interpretieren (vgl. (8.38). Die Übertragung von (8.39) auf den Fall des makroskopischen Feldes ist dann trivial.

15.3 Die Kirchhoff'schen Regeln

Die Theorie der elektrischen Schaltkreise beruht auf folgenden Regeln:
1.) Kirchhoff'scher Satz (**Knotenregel**)
An einer Stromverzweigung gilt für stationäre und quasistationäre Ströme

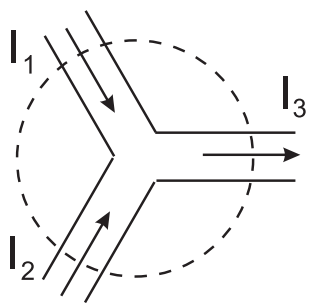
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0. \tag{15.20}$$

Beweis:
Für stationäre und quasistationäre Ströme folgt aus

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0, \tag{15.21}$$

mit dem Gauß'schen Integralsatz:

$$\int_F \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{N} I_i = 0. \tag{15.22}$$



Bemerkung: Der quasistationäre Fall ist dadurch definiert, daß in (14.19) $\partial\vec{\mathcal{D}}/\partial t$ vernachlässigt werden darf, woraus direkt (15.21) folgt. Im stationären Fall ist $\partial\rho_f/\partial t = 0$

und (15.21) folgt aus (14.18). Grundlage der 1. Kirchhoff'schen Regel ist also die Ladungserhaltung.

2. Kirchhoff'sche Regel (**Maschenregel**)
Die Summe der Spannungsabfälle längs eines geschlossenen Weges in einem Schaltkreis (**Masche**) verschwindet,

$$\sum_j U_j = 0. \tag{15.23}$$

Dabei kann U_j stehen für
i) Ohm'schen Spannungsabfall (**Widerstand** R)

$$U_R = IR, \tag{15.24}$$

ii) Kondensatorspannung (**Kapazität** C)

$$U_C = \frac{1}{C}\int I dt, \tag{15.25}$$

iii) induzierte Spannung (**Induktivität** L)

$$U_L = L\frac{dI}{dt} \tag{15.26}$$

sowie eine Batteriespannung.
Beweis: Aus

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \tag{15.27}$$

folgt mit dem Stoke'schen Integralsatz

$$\int_F (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_F \vec{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{f}. \tag{15.28}$$

Grundlage der 2. Kirchhoff'schen Regel ist das Induktionsgesetz oder der Energiesatz. Führt man nämlich eine Ladung q auf einem geschlossenen Weg durch den Schaltkreis, so ist (15.23) nach Multiplikation mit q gerade die Energiebilanz.

Kapitel 16

Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie

16.1 Materialgleichungen

Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = 0 \tag{16.1}$$

und

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \tag{16.2}$$

reichen (wie in Kap. 15.2 schon erwähnt) nicht aus, um die Felder $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{D}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$ zu bestimmen, solange nicht explizite **Materialgleichungen** zur Verfügung stehen, welche $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{D}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$ untereinander verknüpfen. Oft sind auch die makroskopischen Quellen ρ_f und $\mathbf{j}_f$ nicht als Funktion von $\mathbf{r}$ und t vorgegeben, sondern funktional von den zu berechnenden Feldern abhängig.

Für die Diskussion solcher Materialgleichungen formen wir (16.2) so um, daß die Felder $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{B}}$ in Abhängigkeit von den makroskopischen Quellen $\rho_f, \mathbf{j}_f, \vec{\mathcal{P}}$ und $\vec{\mathcal{M}}$ dargestellt werden:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}); \quad \nabla \times \vec{\mathcal{B}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \mu_0 (\mathbf{j}_f + \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} + \nabla \times \vec{\mathcal{M}}). \tag{16.3}$$

Dabei sind $\rho_f, \mathbf{j}_f, \vec{\mathcal{P}}$ und $\vec{\mathcal{M}}$ Funktionale der Felder $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{B}}$; sie können auch von *äußeren* Parametern wie z.B. der Temperatur T abhängen. Es ist also:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}[\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}, T]; \tag{16.4}$$

entsprechend für $\vec{\mathcal{M}}$ und $\mathbf{j}_f$. Über die Kontinuitätsgleichung ist dann ρ_f durch $\mathbf{j}_f$ bestimmt:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \tag{16.5}$$

Im folgenden werden wir für eine Reihe einfacher Modelle Materialgleichungen vom Typ (16.4) diskutieren.

16.2 Ohm'sches Gesetz; elektrische Leitfähigkeit

In Metallen ist die Leitfähigkeit auf die Existenz **freier** Elektronen zurückzuführen. Die Bewegungsgleichung für ein solches Leitungselektron i lautet:

$$M\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \xi\mathbf{v}_i = e\mathbf{E}_i, \tag{16.6}$$

wobei $\mathbf{E}_i$ das auf das Elektron i wirkende elektrische Feld ist und der Reibungsterm der Tatsache (pauschal) Rechnung tragen soll, daß die Leitungselektronen durch Stöße mit den Gitterionen Energie verlieren.

Aus (16.6) folgt mit (4.4), (4.5) für die Stromdichte:

$$\frac{d\mathbf{j}_f}{dt} + \frac{\xi}{M}\mathbf{j}_j = n\frac{e^2}{M}\vec{\mathcal{E}}, \tag{16.7}$$

wobei wir den Mittelwert über $\mathbf{E}_i$ mit dem makroskopischen Feld $\vec{\mathcal{E}}$ identifiziert haben. Für statische $\vec{\mathcal{E}}$-Felder besitzt (16.7) die stationäre Lösung:

$$\mathbf{j}_f = \sigma_0\vec{\mathcal{E}} \tag{16.8}$$

mit der **Gleichstromleitfähigkeit**

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{\xi}. \tag{16.9}$$

Für ein zeitlich periodisches Feld

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0\exp(-i\omega t) \tag{16.10}$$

erwarten wir als Lösung von (16.7)

$$\mathbf{j}_f = \mathbf{j}_0\exp(-i\omega t). \tag{16.11}$$

Gleichung (16.7) ergibt dann die Beziehung

$$\mathbf{j}_f = \sigma(\omega)\vec{\mathcal{E}} \tag{16.12}$$

mit der frequenzabhängigen Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}; \tag{16.13}$$

dabei ist die Dämpfungskonstante τ bestimmt durch

$$\tau = \frac{M}{\xi}. \tag{16.14}$$

Für niedrige Frequenzen $\omega\tau \ll 1$ wird $\sigma(\omega)$ reell, $\sigma(\omega) \approx \sigma_0$, während umgekehrt für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$, $\sigma(\omega)$ rein imaginär wird, sodaß $\mathbf{j}_f$ und $\vec{\mathcal{E}}$ um $\pi/2$ gegeneinander phasenverschoben sind.

16.3 Dielektrika

Unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes $\vec{\mathcal{E}}$ stellt sich in einem nichtleitenden, polarisierbarem Medium eine Polarisation $\vec{\mathcal{P}}$ ein. Wir unterscheiden 2 Typen:

1. Orientierungspolarisation
Schon vorhandene (*permanente*) elektrische Dipole werden im $\vec{\mathcal{E}}$-Feld ausgerichtet. Dem ordnenden Einfluß des Feldes wirkt die thermische Bewegung entgegen und die resultierende makroskopische Polarisation ist temperaturabhängig. Für $\vec{\mathcal{E}} = 0$ sind die Richtungen der elementaren Dipole statistisch verteilt und es ist $\vec{\mathcal{P}} = 0$ (siehe Kap. 16.5).

2. Induzierte Polarisation
Durch das $\vec{\mathcal{E}}$-Feld können Elektronen und Kerne in Atomen oder Molekülen relativ zueinander verschoben und Dipole in Feldrichtung erzeugt (**induziert**) werden. Auf diese Weise entsteht eine temperaturunabhängige Polarisation.

Bei niedrigen Feldstärken und/oder hohem Temperaturen ist die lineare Beziehung

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi_e \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \tag{16.15}$$

eine gute Näherung von (16.4); dabei ist die **elektrische Suszeptibilität** χ_e im allgemeinen temperaturabhängig. Mit (16.15) gilt dann:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \tag{16.16}$$

mit der **Dielektrizitätskonstanten**

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e). \tag{16.17}$$

Bemerkung:
(16.15) und (16.16) setzen ein isotropes Material voraus. Für anisotrope Medien ist χ_e bzw. ϵ durch einen Tensor zu ersetzen.

Für schnell oszillierende Felder erweist sich ϵ (bzw. χ_e) als frequenzabhängig,

$$\epsilon = \epsilon(\omega). \tag{16.18}$$

Beispiel: Für H_2O ist (bei $T = 20^0$ C) $\epsilon/\epsilon_0 \approx 40$, wenn man für ω die Frequenz der gelben Na-Linie wählt.

Die Frequenzabhängigkeit von $\epsilon(\omega)$ läßt sich an Hand des folgenden (vereinfachten) Modells über die Struktur von Atomen und Molekülen verstehen:
Wir nehmen an, daß die Elektronen in einem Atom oder Molekül gedämpfte harmonische Schwingungen ausführen. Dann lautet die Bewegungsgleichung für das n-te Elektron eines Atoms (oder Moleküls) unter dem Einfluß eines periodischen $\vec{\mathcal{E}}$-Feldes :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_n + \gamma_n \frac{d}{dt}\mathbf{r}_n + \omega_n^2 \mathbf{r}_n = \frac{e}{M}\vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t). \tag{16.19}$$

Mit dem Ansatz

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^0 \exp(-i\omega t) \tag{16.20}$$

findet man als Lösung von (16.19)

$$\mathbf{r}_n = \frac{e}{M(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n)}\,\vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \tag{16.21}$$

und daraus für das Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{Z} e\mathbf{r}_n = \frac{e^2}{M}\vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) \sum_{n=1}^{Z} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n)}, \tag{16.22}$$

wenn Z Elektronen im Atom (Molekül) sind. Es folgt für die elektrische Suszeptibilität:

$$\chi_e = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 M} \sum_n \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_n)}, \tag{16.23}$$

wobei N die Zahl der Atome (Moleküle) pro Volumeneinheit ist.

Der Dämpfungsterm in (16.19) trägt pauschal der Tatsache Rechnung, daß die atomaren Oszillatoren durch Stöße zwischen den Atomen oder Molekülen Energie verlieren. Dies hat zur Folge, daß χ_e bzw. ϵ komplex werden. Als Beispiel werden wir im nächsten Kapitel die Absorption elektromagnetischer Wellen in Materie betrachten.

16.4 Para- und Diamagnetismus

Eine Magnetisierung $\vec{\mathcal{M}}$ kann (analog dem Fall der Polarisation $\vec{\mathcal{P}}$) auf folgende Weise entstehen:

1. Orientierungsmagnetisierung (Paramagnetismus)
Permanente elementare magnetische Dipole werden in einem äußeren Magnetfeld gegen die thermische Bewegung ausgerichtet und führen zu einer makroskopischen Magnetisierung $\vec{\mathcal{M}}$. Ohne Magnetfeld sind die elementaren Dipolmomente $\mathbf{m}$ bzgl. ihrer Richtung statistisch verteilt und man erhält im makroskopischen Mittel $\vec{\mathcal{M}} = 0$.

2. Induzierte Magnetisierung (Diamagnetismus)
Im Magnetfeld ändern sich die Bahnen der Elektronen, insbesondere ihr Drehimpuls. Eine solche Änderung des Drehimpulses ist nach (5.34) mit einer Änderung des magnetischen Dipolmoments des Atoms verbunden. Atome, die kein permanentes magnetisches Dipolmoment haben, erhalten also im äußeren Magnetfeld ein **induziertes** Dipolmoment. Seine Richtung ist durch die Richtung des äußeren Feldes gegeben (s.u.).

Die Magnetisierung $\vec{\mathcal{M}}$ hängt also im allgemeinen vom äußeren Feld und der Temperatur ab. Da das fundamentale Feld das $\vec{\mathcal{B}}$-Feld ist, sollten wir entsprechend (16.4) eigentlich

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}[\vec{\mathcal{B}}, T] \tag{16.24}$$

betrachten. Es ist jedoch üblich, (16.24) durch

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}[\vec{\mathcal{H}}, T] \tag{16.25}$$

zu ersetzen, da $\vec{\mathcal{H}}$ über die Stromdichte $\mathbf{j}_f$ praktisch leichter kontrollierbarer ist als $\vec{\mathcal{B}}$.

Bemerkung:
Im elektrischen Fall betrachtet man - im Einklang mit der mikroskopischen Theorie -

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}[\vec{\mathcal{E}}, T], \tag{16.26}$$

da Potentialdifferenzen bequemer kontrollierbar sind als ρ_f und das damit verbundene $\vec{\mathcal{D}}$-Feld.

Für genügend schwache Felder und/oder hohe Temperaturen ist zu erwarten, daß

$$\vec{\mathcal{M}} = \chi_m \vec{\mathcal{H}} \tag{16.27}$$

eine gute Näherung von (16.25) ist; dabei ist χ_m die **magnetische Suszeptibilität**. Mit (16.27) und (14.22) wird dann:

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}, \tag{16.28}$$

wobei die **Permeabilität** μ mit χ_m über

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \tag{16.29}$$

zusammenhängt.

Abschließend wollen wir das Zustandekommen des Diamagnetismus quantitativ näher formulieren. Als einfachstes Modell betrachten wir ein an den Atomkern elastisch gebundenes Elektron unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_n + \omega_n^2 \mathbf{r}_n = 2\vec{\omega}_L \times \frac{d}{dt}\mathbf{r}_n \tag{16.30}$$

mit der Abkürzung

$$\vec{\omega}_L = -\frac{e}{2M}\mathbf{B}. \tag{16.31}$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichung (16.30) gehen wir zu einem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_L$ gegenüber dem Laborsystem Σ rotierenden Koordinatensystem Σ' über. Wegen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'; \quad \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}' + (\vec{\omega}_L \times \mathbf{r}'); \quad \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}' + 2(\vec{\omega}_L \times \frac{d}{dt}\mathbf{r}') + \vec{\omega}_L \times (\vec{\omega}_L \times \mathbf{r}') \tag{16.32}$$

folgt dann aus (16.30):

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}' + \omega_n^2 \mathbf{r}'_n = \vec{\omega}_L \times (\vec{\omega}_L \times \mathbf{r}'_n). \tag{16.33}$$

Da im allgemeinen $\omega_n \gg \omega_L$ ist, erhalten wir näherungsweise

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}' + \omega_n^2 \mathbf{r}'_n = 0; \tag{16.34}$$

das Elektron *sieht* im rotierenden Koordinatensystem Σ' das Magnetfeld (fast) nicht, es schwingt mit der ungestörten Frequenz ω_n. Aus der Sicht des Laborsystems Σ tritt dazu eine Rotation um die Richtung von $\mathbf{B}$ mit der **Lamor-Frequenz** ω_L.

Entsprechend dieser Zerlegung der Bewegung teilen wir das magnetische Moment eines Atoms mit Z Elektronen auf in 2 Anteile:

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2M}\sum_i(\mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i) + \frac{e}{2}\sum_i \mathbf{r}'_i \times (\vec{\omega}_L \times \mathbf{r}'_i) = \frac{e}{2M}\sum_i \mathbf{l}'_i - \frac{e^2}{4M}\sum_i\{\mathbf{B}r'^2_i - \mathbf{r}'_i(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}'_i)\}. \quad (16.35)$$

Der 1. Term in (16.35) liefert das permanente magnetische Dipolmoment; es ist von null verschieden, falls der Drehimpuls (hier: Bahndrehimpuls) des ungestörten Atoms $L' \neq 0$ ist. Der 2. Term beschreibt das induzierte Moment.

Zur Diskussion des induzierten Moments setzen wir eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung voraus. Dann geben die Mischterme, z.B. $\sum_i x'_i y'_i$, in (16.35) keinen Beitrag; der Beitrag der verbleibenden quadratischen Terme läßt sich durch den mittleren Radius ρ des Atoms ausdrücken. Man erhält:

$$\mathbf{m}_{ind} = -\frac{e^2}{6M}\rho^2\mathbf{B}. \quad (16.36)$$

Offensichtlich wirkt der Diamagnetismus ($\chi_m < 0$) dem Paramagnetismus ($\chi_m \geq 0$) entgegen. Atome mit $L' = 0$ sind diamagnetisch; erweist sich eine Substanz als paramagnetisch, so überwiegt der 1. Term in (16.35) den 2. Term.

Bemerkung:
Atomkerne können auch einen Drehimpuls besitzen. Wegen (5.34) ist das damit verknüpfte Kern-Moment erheblich kleiner als das von den Elektronen erzeugte, da die Nukleonmasse ≈ 2000 mal größer ist als die Elektronenmasse.

16.5 Temperaturabhängigkeit der Polarisation

Wir setzen homogene und isotrope Medien voraus; dann gilt für den Anteil der Polarisation, der von der Ausrichtung permanenter Dipole im $\vec{\mathcal{E}}$-Feld herrührt:

$$\mathcal{P} = N < \mathbf{p} >_T, \quad (16.37)$$

wobei N die Zahl der Atome pro Volumeneinheit ist und $< \mathbf{p} >_T$ sich durch Mittelung der Dipole mit Betrag p bzgl. ihrer Richtung zum $\vec{\mathcal{E}}$-Feld bei gegebener Temperatur T ergibt,

$$< \mathbf{p} >_T = \frac{\int d(\cos\theta)\cos\theta\exp(\xi\cos\theta)}{\int d(\cos\theta)\exp(\xi\cos\theta)}\ p \quad (16.38)$$

mit

$$\xi = \frac{p\mathcal{E}}{kT}. \quad (16.39)$$

θ bezeichnet hier den Winkel zwischen einem Dipol $\mathbf{p}$ und dem Feld $\vec{\mathcal{E}}$. Der Gewichtsfaktor

$$\exp(\xi\cos\theta) = \exp(\frac{\mathbf{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}}{kT}) \quad (16.40)$$

ist aus der Thermodynamik übernommen; er ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, daß ein elementarer Dipol bei gegebener Temperatur T mit dem Feld $\vec{\mathcal{E}}$ den Winkel θ bildet. Der Nenner in (16.38) sorgt für die richtige Normierung.

Die Auswertung der Integrale in (16.38) ergibt:

$$\mathcal{P} = Np \{ \coth\xi - \frac{1}{\xi} \}. \tag{16.41}$$

Diskussion:
Fall 1: starke Felder, tiefe Temperaturen, d.h.

$$\xi \gg 1, \tag{16.42}$$

so daß - wie zu erwarten - mit

$$\mathcal{P} = Np \tag{16.43}$$

der **Sättigungswert** erreicht wird.
Fall 2: schwache Felder, hohe Temperaturen, d.h.

$$\xi \ll 1, \tag{16.44}$$

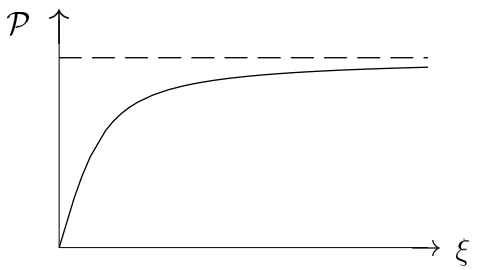
so daß mit

$$\coth\xi = \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3} + \cdots \tag{16.45}$$

folgt:

$$\mathcal{P} = \frac{Np^2}{3kT}\mathcal{E}, \tag{16.46}$$

der oben diskutierte **lineare Bereich**.



Bemerkung:
Das obige Verfahren kann direkt auf die Behandlung des Paramagnetismus übertragen werden, indem man die Energie des Dipols $\mathbf{p}$ im $\vec{\mathcal{E}}$-Feld: $-\mathbf{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}$, durch $-\mathbf{m} \cdot \vec{\mathcal{B}}$ ersetzt, wobei $\mathbf{m}$ das (permanente) magnetische Dipolmoment ist.

Kapitel 17

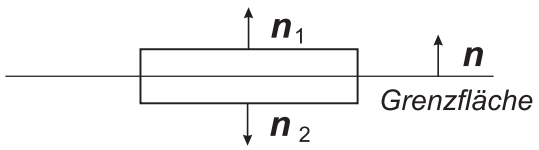
Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen

17.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften. Der Einfachheit halber sei im folgenden angenommen, daß die Grenzfläche eben sei. Aussagen über die
1. Normalkomponenten von $\vec{\mathcal{B}}$ und $\vec{\mathcal{D}}$ erhalten wir aus

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_f. \tag{17.1}$$

Dazu wenden wir den Gauß'schen Integralsatz auf folgende Skizze an:



Die Deckflächen (F_1, F_2) einer *Schachtel* mit Volumen V und Oberfläche F mögen symmetrisch zur Grenzfläche liegen; Größe und Gestalt der Deckflächen seien beliebig. Macht man die Höhe h der Schachtel beliebig klein, so folgt aus (17.1):

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}}\, dV = \int_F \vec{\mathcal{B}} \cdot d\mathbf{f} = \int_{F_1} (\vec{\mathcal{B}}_n^{(1)} - \vec{\mathcal{B}}_n^{(2)})\, df = 0, \tag{17.2}$$

da für die Flächennormalen gilt $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} = -\mathbf{n}_2$. Da F_1 beliebig gewählt werden kann, muß gelten:

$$\vec{\mathcal{B}}_n^{(1)} = \vec{\mathcal{B}}_n^{(2)}. \tag{17.3}$$

Die Normalkomponente von $\vec{\mathcal{B}}$ geht also stetig durch die Grenzfläche hindurch.

Analog folgt aus

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}\, dV = \int_F \vec{\mathcal{D}} \cdot d\mathbf{f} = \int_{F_1} (\vec{\mathcal{D}}_n^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}_n^{(2)})\, df = Q_f, \tag{17.4}$$

für die Normalkomponente von $\vec{\mathcal{D}}$:

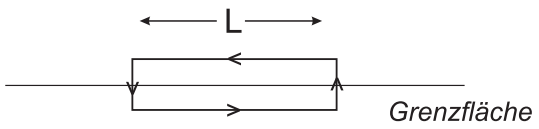
$$\vec{\mathcal{D}}_n^{(1)} - \vec{\mathcal{D}}_n^{(2)} = \gamma_f, \tag{17.5}$$

wenn γ_f die Flächenladungsdichte der freien Ladungsträger in der Grenzfläche ist. Für Dielektrika mit $\gamma_f = 0$ ist die Normalkomponente von $\vec{\mathcal{D}}$ stetig; dagegen springt $\vec{\mathcal{D}}_n$ beim Übergang Leiter - Nichtleiter um γ_f.

2. Tangentialkomponenten von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$. Wir benutzen:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \mathbf{j}_f, \tag{17.6}$$

und wenden den Integralsatz von Stokes auf folgende Skizze an:



Eine Rechteckschleife S habe Kanten der Länge l parallel zur Grenzfläche und der Länge h senkrecht dazu. Dann gilt bei Integration über die in S eingespannte ebene Fläche F im Limes $h \to 0$:

$$\int_F (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^l ds\, (\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} - \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)}) = 0, \tag{17.7}$$

da mit $h \to 0$ der Inhalt der Fläche F verschwindet, so daß :

$$\int_F (\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{f} \to 0 \qquad \text{für } h \to 0. \tag{17.8}$$

Da l in (17.7) beliebig gewählt werden kann, folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} = \vec{\mathcal{E}}_t^{(2)}. \tag{17.9}$$

Ganz analog ergibt die 2. Gleichung von (17.6)

$$\int_0^l ds\, (\vec{\mathcal{H}}_t^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}_t^{(2)}) = I_f, \tag{17.10}$$

wenn I_f die Stromstärke der in der Grenzfläche fließenden (freien) Ströme ist, senkrecht zur Tangentialkomponente $\vec{\mathcal{H}}_t$ von $\vec{\mathcal{H}}$.

Mit der Darstellung

$$I_f = \int_0^l i_f \, dl \tag{17.11}$$

folgt aus (17.10) wie oben

$$\vec{\mathcal{H}}_t^{(1)} - \vec{\mathcal{H}}_t^{(2)} = i_f; \tag{17.12}$$

dabei ist i_f die Flächenstromdichte in der Grenzfläche senkrecht zu $\vec{\mathcal{H}}_t$.

Wir untersuchen die obigen Resultate nun für:

17.2 Lineare, isotrope Medien

Falls

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon\vec{\mathcal{E}} \tag{17.13}$$

gilt, findet man aus (17.3), (17.5), (17.9) und (17.12):

$$\mu_1\vec{\mathcal{H}}_n^{(1)} = \mu_2\vec{\mathcal{H}}_n^{(2)}; \quad \frac{\vec{\mathcal{D}}_t^{(1)}}{\epsilon_1} = \frac{\vec{\mathcal{D}}_t^{(2)}}{\epsilon_2} \tag{17.14}$$

und

$$\epsilon_1\vec{\mathcal{E}}_n^{(1)} - \epsilon_2\vec{\mathcal{E}}_n^{(2)} = \gamma_f; \quad \frac{\vec{\mathcal{B}}_t^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\vec{\mathcal{B}}_t^{(2)}}{\mu_2} = i_f. \tag{17.15}$$

Gilt das Ohm'sche Gesetz,

$$\mathbf{j}_f = \sigma\vec{\mathcal{E}}, \tag{17.16}$$

so folgt aus (17.9) für die Tangentialkomponente von $\mathbf{j}_f$:

$$\frac{\mathbf{j}_{ft}^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{ft}^{(2)}}{\sigma_2}. \tag{17.17}$$

Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \tag{17.18}$$

bei Anwendung des Gauß'schen Satzes (wie unter 1.)

$$j_{fn}^{(1)} - j_{fn}^{(2)} = -\frac{\partial \gamma_f}{\partial t}. \tag{17.19}$$

Speziell für stationäre Ströme folgt aus

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0 \tag{17.20}$$

die Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\mathbf{j}_{fn}^{(1)} = \mathbf{j}_{fn}^{(2)}. \tag{17.21}$$

Beispiel: Übergang Leiter (1) - Nichtleiter (2)

Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, folgt aus (17.21)

$$\mathbf{j}_{fn}^{(1)} = \mathbf{j}_{fn}^{(2)} = 0, \tag{17.22}$$

und damit über (17.16)

$$\vec{\mathcal{E}}_n^{(1)} = 0, \tag{17.23}$$

da $\sigma_1 \neq 0$. Dagegen folgt für $\vec{\mathcal{E}}_n^{(2)}$ aus (17.15):

$$\epsilon_2 \mathcal{E}_n^{(2)} = -\gamma_f. \tag{17.24}$$

Insbesondere für die Elektrostatik ist wegen $\mathbf{j}_f = 0$ auch

$$\vec{\mathcal{E}}_t^{(1)} = 0; \tag{17.25}$$

dann fordert (17.9)

$$\vec{\mathcal{E}}_t^{(2)} = 0, \tag{17.26}$$

also steht das $\vec{\mathcal{E}}$-Feld senkrecht zur Leiteroberfläche; es ist null innerhalb des Leiters.

17.3 Reflexion und Brechung von Licht

Bei Abwesenheit freier Ladungen lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = 0 \tag{17.27}$$

und

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}. \tag{17.28}$$

Sie vereinfachen sich mit der Annahme linearer, isotroper Medien

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu \vec{\mathcal{H}}; \quad \vec{\mathcal{D}} = \epsilon \vec{\mathcal{E}}, \tag{17.29}$$

zu

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{17.30}$$

und

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}. \tag{17.31}$$

Wie in Kap. 9 lassen sich die Gleichungen (17.31) unter Beachtung von (17.30) entkoppeln. Man erhält die Wellengleichungen

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{E}} = 0; \quad \Delta \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{H}} = 0, \tag{17.32}$$

wobei c' die Phasengeschwindigkeit im Medium ist (vgl. Kap. 9.3):

$$\frac{1}{c'^2} = \epsilon\mu. \tag{17.33}$$

Da wir im folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir spezielle Lösungen von (17.32) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \ \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\}, \tag{17.34}$$

wobei zwischen ω und $\mathbf{k}$ die Beziehung

$$\omega = kc' \tag{17.35}$$

gelten muß. Wie in Kap. 9 findet man, daß $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ und $\mathbf{k}$ senkrecht zueinander stehen.

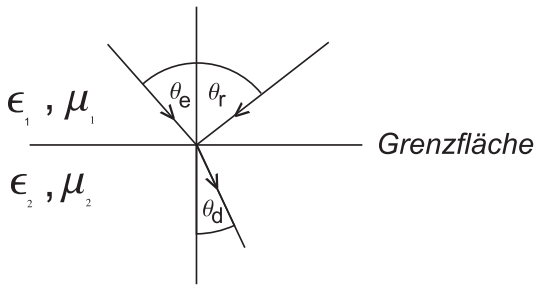
Gleichung (17.35) unterscheidet sich von (9.23) dadurch, daß dort c eine Konstante ist, während c' von ω abhängt, da $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Die Komponenten verschiedener Frequenz ω in einem Wellenpaket laufen also mit verschiedener Geschwindigkeit $c' = c'(\omega)$, das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei (**Zerfließen** von Wellenpaketen; vgl. hierzu Kap. 10.3).

Bemerkung:
Je nach Verlauf von $\epsilon(\omega)$ kann $c' > c$ werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die **Phasengeschwindigkeit** v_{ph} nicht identisch ist mit der **Gruppengeschwindigkeit**

$$v_g = (\frac{d\omega}{dk})_{k=k_0} \tag{17.36}$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl k_0 konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch v_g und nicht durch v_{ph} bestimmt.

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (17.34), an einer ebenen Grenzfläche (Skizze):



Aus (17.9) folgt

$$\vec{\tau}\cdot(\vec{\mathcal{E}}_e + \vec{\mathcal{E}}_r) = \vec{\tau}\cdot\vec{\mathcal{E}}_d \tag{17.37}$$

für alle Zeiten t und alle Vektoren $\mathbf{r}$ der Grenzfläche; $\vec{\tau}$ sei ein Einheitsvektor parallel zur Grenzfläche, $\vec{\mathcal{E}}_e, \vec{\mathcal{E}}_r$ und $\vec{\mathcal{E}}_d$ bezeichnen die elektrische Feldstärke der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Lichtwelle. Legt man den Koordinatenursprung in die Grenzfläche, so folgt aus (17.37) und (17.34) für $\mathbf{r} = 0$ die Erhaltung der Frequenz,

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d. \tag{17.38}$$

Für t=0 ergibt sich aus der Phasengleichheit

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} \tag{17.39}$$

die **Koplanarität** von $\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$. Wählt man speziell $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ so, daß $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = 0$, so müssen gemäß (17.39) die 3 Vektoren $\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$ senkrecht zu $\mathbf{r}_0$ sein, was nur möglich ist, wenn $\mathbf{k}_e, \mathbf{k}_r$ und $\mathbf{k}_d$ in einer Ebene liegen. Dann folgt aus (17.39),

$$k_e \sin\theta_e = k_r \sin\theta_r, \tag{17.40}$$

mit (17.38), $k_e = k_r$, das **Reflexionsgesetz**:

$$\theta_e = \theta_r. \tag{17.41}$$

Ebenfalls aus (17.38) ergibt sich:

$$\frac{k_e}{k_d} = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{17.42}$$

so daß mit (17.39) das **Brechungsgesetz** folgt:

$$\frac{\sin\theta_e}{\sin\theta_d} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{17.43}$$

Wertet man die in (17.37) noch enthaltenen Bedingungen für die Amplituden aus, so erhält man die **Fresnel'schen Formeln**, das **Brewster'sche Gesetz** (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und die **Totalreflexion** (Faser-Optik).

Bemerkung:
Nach (16.23) ist $\epsilon(\omega)$ im allgemeinen komplex, also auch k komplex. Eine elektromagnetische Welle wird also im Medium geschwächt (Absorption).

17.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden Materialien

Wir betrachten einen Ohm'schen Leiter mit ebener Grenzfläche und Oberflächenladung σ. Dafür lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} - \sigma \vec{\mathcal{E}} = 0; \quad \nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = 0. \tag{17.44}$$

Solange kein Ladungsstau auftritt, ist $\rho_f = 0$ (vgl. Kap. 4.2), obwohl

$$\mathbf{j}_f = \sigma \vec{\mathcal{E}} \neq 0. \tag{17.45}$$

Als Lösung von (17.44) setzen wir an:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \tag{17.46}$$

ebenso für $\vec{\mathcal{H}}$ und finden mit (17.44):

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu\omega}(\mathbf{k} \times \vec{\mathcal{E}}); \quad i(\mathbf{k} \times \vec{\mathcal{H}}) + i\epsilon\omega\vec{\mathcal{E}} - \sigma\vec{\mathcal{E}} = 0. \tag{17.47}$$

Eliminiert man im letzten Ausdruck $\vec{\mathcal{E}}$ oder $\vec{\mathcal{H}}$, so folgt:

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon\ (1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}), \tag{17.48}$$

wenn man die aus (17.44) folgende Transversalität von $\vec{\mathcal{E}}$ und $\vec{\mathcal{H}}$ beachtet. Setzt man

$$k = \alpha + i\beta; \quad \alpha, \beta \ \text{ reell}, \tag{17.49}$$

so folgt mit

$$k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta, \tag{17.50}$$

daß :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon\omega^2; \quad 2\alpha\beta = \mu\omega\sigma. \tag{17.51}$$

Eliminiert man in der 1. Gleichung α mit Hilfe der 2. Gleichung, so entsteht:

$$\beta^4 - \frac{1}{4}(\mu\omega\sigma)^2 + \beta^2\mu\epsilon\omega^2 = 0. \tag{17.52}$$

Da β reell sein soll, kommt als Lösung nur in Frage:

$$\beta^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2}(\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2} - 1); \tag{17.53}$$

dazu gehört

$$\alpha^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2}(\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2} + 1). \tag{17.54}$$

Für $\sigma \to 0$ folgt:

$$\beta \to 0; \quad \alpha^2 \to \mu\epsilon\omega^2 \tag{17.55}$$

in Einklang mit (17.35). Da $\mu\omega\sigma \geq 0$, müssen α und β nach (17.51) gleiches Vorzeichen haben. Für $\beta \neq 0$ (d.h. $\sigma \neq 0$) wird eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft; für eine in positiver x-Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$\exp\{i(kx - \omega t)\} = \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}\ \exp\{-\beta x\}, \tag{17.56}$$

wobei mit $\alpha > 0$ auch $\beta > 0$ sein muß .

Grenzfälle:
1.) Bei hoher Leitfähigkeit ($\sigma \to \infty$) wird die Lichtwelle praktisch total reflektiert, da die Eindringtiefe $d \sim \beta^{-1}$ verschwindet.
2.) Für hohe Frequenzen ($\omega \to \infty$) ist zu beachten, daß σ gemäß (16.13) frequenzabhängig ist: σ wird für $\omega \to \infty$ rein imaginär, also k^2 in (17.48) reell; das Material wird *durchsichtig*. Diesen Effekt kann man mit **harter** Röntgenstrahlung nachweisen.

Als Folge der Dämpfung β können wegen (17.45) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch β^{-1} bestimmt ist (**Skin-Effekt**).

Teil VI

Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 18

Kovarianz der Elektrodynamik

Wir wollen im folgenden zeigen, daß die Grundgleichungen der Elektrodynamik in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben (**Kovarianz der Elektrodynamik**) und damit dem Relativitätsprinzip genügen. Zur Vorbereitung untersuchen wir die mathematische Struktur der Lorentz-Transformationen.

18.1 Lorentz-Gruppe

Zunächst soll gezeigt werden, daß die Lorentz-Transformation als orthogonale komplexe Transformationen in einem 4-dimensionalen pseudoeuklidischen Vektorraum (**Minkowski-Raum**) aufgefaßt werden kann. Dazu führen wir folgende Koordinaten ein:

$$x_0 = ict, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \tag{18.1}$$

womit sich das Längenquadrat eines Raum-Zeit-Vektors in verschiedenen Bezugssystemen Σ und Σ' schreiben läßt als:

$$\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu'^2. \tag{18.2}$$

Die allgemeine Lorentz-Transformation

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{18.3}$$

muß die **Länge** des Vektors (x_0, x_1, x_2, x_3) invariant lassen:

$$\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu^2 = \mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = \text{const.} \tag{18.4}$$

In Analogie zum 3-dimensionalen euklidischen Raum kann man diese Bedingung als Orthogonalitätsrelation für die Transformationskoeffizienten $a_{\mu\nu}$ schreiben:

$$\sum_\nu a^T_{\mu\nu} a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}, \tag{18.5}$$

wo a^T die zu a transponierte Matrix ist. Gleichung (18.5) folgt aus:

$$\sum_\mu x'^2_\mu = \sum_\mu \sum_{\nu\nu'} a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} x_\nu x_{\nu'} = \sum_{\nu\nu'} \{\sum_\mu a^T_{\nu\mu} a_{\mu\nu'}\} x_\nu x_{\nu'} = \sum_{\nu\nu'} \delta_{\nu\nu'} x_\nu x_{\nu'} = \sum_\nu x^2_\nu. \qquad (18.6)$$

Für eine Lorentz-Transformation in x_1-Richtung mit Geschwindigkeit $\beta = v/c$ hat die Transformationsmatrix $a_{\mu\nu}$ die spezielle Gestalt

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma\beta & 0 & 0 \\ i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (18.7)$$

mit $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$. Die in (18.7) enthaltene Auszeichnung der x_1-Achse läßt sich beheben, indem man (18.7) mit einer orthogonalen Transformation im R_3 in Form einer Drehung kombiniert. Grundlage dafür ist die Gruppeneigenschaft der Lorentz-Transformationen:

1) Führt man 2 Lorentz-Transformationen nacheinander aus,

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu; \quad x''_\rho = \sum_\nu a'_{\rho\nu} x'_\nu; \quad (\Sigma \to \Sigma' \to \Sigma''), \qquad (18.8)$$

so ist das Ergebnis

$$x''_\rho = \sum_{\nu,\mu} a'_{\rho\nu} a_{\nu\mu} x_\mu = \sum_\mu a''_{\rho\mu} x_\mu; \quad (\Sigma \to \Sigma'') \qquad (18.9)$$

wieder eine Lorentz-Transformation, denn für die Matizen a'', a' und a gilt:

$$(a'')^T a'' = (a'a)^T (a'a) = a^T (a'^T a') a = a^T a = 1_4, \qquad (18.10)$$

da nach Voraussetzung

$$a^T a = 1_4; \quad (a')^T a' = 1_4 \qquad (18.11)$$

ist mit 1_4 als der 4×4 Einheitsmatrix. Die Verknüpfung zwischen den Elementen der Gruppe ist also die (4×4) Matrix-Multiplikation.

2.) Das neutrale Element ist die 1_4-Matrix für Lorentz-Transformationen mit Geschwindigkeit $v = 0$.

3.) Zu jeder Transformation a gibt es eine inverse, da aus (18.5) folgt:

$$\det(a^T a) = (\det(a))^2 = 1, \qquad (18.12)$$

also gilt:

$$\det(a) \neq 0. \qquad (18.13)$$

4.) Da die Matrix-Multiplikation assoziativ ist, gilt für Lorentz-Transformationen auch das Assoziativ-Gesetz.

Die orthogonalen Transformationen im R_3 (Drehungen und Spiegelungen) bilden eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe, dargestellt durch

$$d_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_{ik} \end{pmatrix} \tag{18.14}$$

mit i, k = 1,2,3 und

$$\sum_{m=1}^{3} d_{im} d_{mj} = \delta_{ij}. \tag{18.15}$$

Die allgemeine Lorentz-Transformation (18.3) mit der Bedingung (18.5) erhält man durch Kombination von (18.7) mit (18.14), (18.15) und Hinzunahme der *Zeitumkehr*

$$x_i' = x_i; \quad x_0' = -x_0; \quad i = 1, 2, 3. \tag{18.16}$$

Die Lorentz-Transformationen umfassen also: Drehungen im R_3, Raum-Spiegelungen und Zeitumkehr sowie den Übergang zwischen Inertialsystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen.

Bei einer Translation im Raum oder in der Zeit ändert sich die Bedingung (18.2) nicht, da sie nur räumliche und zeitliche Abstände enthält. Die oben besprochene Gruppe der **homogenen** Lorentz-Transformationen können wir also noch durch Translationen in Raum und Zeit ergänzen. Man erhält dann die 10-parametrige **Poincaré-Gruppe**, welche 3 Parameter für räumliche Drehungen, 3 Parameter für Lorentz-boosts mit der Geschwindigkeit **v** und 4 Parameter für raum-zeitliche Translationen enthält. *Sie wird heute als die aller Physik zugrundeliegende Invarianz-Gruppe angesehen.*

18.2 Lorentz-Gruppe (Vierer-Tensoren)

Analog dem Fall der Gruppe der Drehungen definieren wir nun Tensoren bzgl. der Lorentzgruppe:

1.) **Lorentz-Skalar**

Wir nennen eine Größe Ψ einen **Lorentz-Skalar**, wenn Ψ sich unter Lorentz-Transformationen nicht ändert,

$$\Psi \to \Psi' = \Psi. \tag{18.17}$$

Ein Beispiel dafür ist die elektrische Ladung (vgl. Kap.1.1).

2.) **Lorentz-Vektor**

Wir definieren einen **Lorentz- oder Vierer-Vektor** dadurch, daß sich bei Lorentz-Transformationen seine Komponenten A_μ wie die Komponenten x_μ transformieren

$$A_\mu \to A_\mu' = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu. \tag{18.18}$$

Beispiele:
i) Die partiellen Ableitungen eines Lorentz-Skalars Ψ nach den x_μ bilden die Komponenten eines Vierer-Vektors, denn:

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu}. \tag{18.19}$$

Dabei wurde die Umkehrformel zu (18.3)

$$x_\nu = \sum_\rho a_{\rho\nu} x'_\rho \tag{18.20}$$

benutzt.
ii) Die **4-Divergenz** eines Vierer-Vektors ist ein Vierer-Skalar:

$$\sum_\nu \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\nu} = \sum_\nu \sum_{\mu,\mu'} a_{\nu\mu} a_{\nu\mu'} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_{\mu'}} = \sum_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \tag{18.21}$$

bei Beachtung von (18.5).
iii) Wählt man als Komponenten des Vierer-Vektors gemäß (18.18)

$$A_\mu = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}, \tag{18.22}$$

so folgt aus (18.21):

$$\sum_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} \Psi = \sum_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu'^2} \Psi'. \tag{18.23}$$

Der Operator $\Box = \sum_\mu \partial^2 / \partial x_\mu^2$ ist also invariant unter Lorentz-Transformationen. Daher transformiert sich für einen Vierer-Vektor mit den Komponenten A_μ die Größe

$$\sum_\nu \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} A_\mu = \Box A_\mu \tag{18.24}$$

wie die μ-te Komponente eines Vierervektors.
iv) Das Skalarprodukt zweier Vierer-Vektoren ist ein Vierer-Skalar:

$$\sum_\mu A'_\mu B'_\mu = \sum_\mu \sum_{\nu,\rho} a_{\mu\rho} a_{\mu\nu} A_\rho B_\nu = \sum_\nu A_\nu B_\nu. \tag{18.25}$$

3.) **Lorentz-Tensoren 2. Stufe**

Außer den Skalaren (= Tensoren 0. Stufe) und den Vektoren (= Tensoren 1. Stufe) werden wir noch auf Tensoren 2. Stufe treffen. Sie sind definiert als 4×4-Matrizen, deren Komponenten $F_{\mu\nu}$ die Transformationseigenschaft

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda,\sigma} a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma} \tag{18.26}$$

besitzen.

18.3 Viererstromdichte

Um die Kovarianz der Elektrodynamik zu beweisen, untersuchen wir zunächst das Transformationsverhalten der *Quellen* $\mathbf{j}$ und ρ des elektromagnetischen Feldes. Als Ausgangspunkt dient die Ladungserhaltung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{18.27}$$

Mit den Bezeichnungen

$$j_0 = ic\rho; \quad j_1 = j_x; \quad j_2 = j_y; \quad j_3 = j_z \tag{18.28}$$

können wir die Kontinuitätsgleichung (18.27) in Vierer-Notation schreiben als

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu = 0. \tag{18.29}$$

Wegen der Ladungsinvarianz muß (18.29) in jedem Inertialsystem gelten; (18.29) ist invariant unter Lorentz-Transformationen. Dann sind nach (18.21) j_μ die Komponenten eines Vierer-Vektors, der **Vierer-Stromdichte**.

Davon wollen wir uns für einen einfachen Fall direkt überzeugen: Wir betrachten eine im System Σ' ruhende Ladungsverteilung:

$$j'_0 = ic\rho_0, \quad j'_1 = j'_2 = j'_3 = 0. \tag{18.30}$$

Als Komponenten eines Vierer-Vektors müssen sich die j'_μ unter der Lorentz-Transformation mit Geschwindigkeit $\beta = v/c$ in x_1-Richtung

$$x_0 = \gamma(i\beta x'_1 + x'_0); \quad x_1 = \gamma(x'_1 - i\beta x'_0); \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3, \tag{18.31}$$

transformieren wie

$$j_0 = ic\gamma\rho_0; \quad j_1 = \gamma\rho_0 v; \quad j_2 = 0; \quad j_3 = 0. \tag{18.32}$$

Ein Vergleich mit (18.28) ergibt:

$$\rho = \gamma\rho_0. \tag{18.33}$$

Nun wissen wir, daß ein in Σ' ruhendes Volumenelement dV_0 für einen Beobachter in Σ die Größe

$$dV = \frac{dV_0}{\gamma} \tag{18.34}$$

aufgrund der Längenkontraktion hat. Die Ladungsinvarianz,

$$\int_V \rho dV = \int \gamma\rho_0 \frac{dV_0}{\gamma} = \int \rho_0 dV_0 \tag{18.35}$$

zeigt also, daß $ic\rho$ tatsächlich als 0.te Komponente eines Vierer-Vektors angesehen werden kann. Weiter ist mit (18.33)

$$j_1 = \rho v \tag{18.36}$$

in Übereinstimmung mit der Definition der (gewöhnlichen) Stromdichte; die Komponenten von $\mathbf{j}$ sind also tatsächlich die 1,2,3-Komponenten eines Vierer-Vektors.

18.4 Vierer-Potential

Um das Transformationsverhalten des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ und des skalaren Potentials Φ zu finden, arbeiten wir zweckmäßigerweise in der Lorentz-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{18.37}$$

Dann gelten für $\mathbf{A}$ und Φ die inhomogenen Wellengleichungen

$$\Box \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}; \quad \Box \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{18.38}$$

Führt man analog (18.28) ein

$$(A_\mu) = (\frac{i}{c}\Phi, \mathbf{A}), \tag{18.39}$$

so kann man zusammenfassen zu

$$\Box A_\mu = -\mu_0 j_\mu, \tag{18.40}$$

wenn man benutzt:

$$\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}. \tag{18.41}$$

Da auf der rechten Seite von (18.40) die Komponenten eines Vierer-Vektors stehen und der Differentialoperator $\Box$ nach (18.23) ein Vierer-Skalar ist, erweisen sich die A_μ als Komponenten eines Vierer-Vektors.

Die Lorentz-Konvention (18.37) schreibt sich nun als:

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu = 0 \tag{18.42}$$

und ist gemäß (18.21) Lorentz-invariant.

Ergebnis:
Die Gleichungen (18.29) und (18.42) sind Lorentz-invariant, d.h. sie ändern sich nicht beim Übergang von einem Inertialsystem auf ein anderes. Wenn in Σ

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu = 0; \quad \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu = 0 \tag{18.43}$$

gilt, so auch in Σ':

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} j'_\mu = 0; \quad \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} A'_\mu = 0. \tag{18.44}$$

Die 4 Gleichungen (18.40) sind kovariant, denn aus (18.40) in Σ folgt für Σ'

$$\Box A'_\mu = -\mu_0 j'_\mu, \tag{18.45}$$

da:

$$\sum_\nu a_{\nu\mu} \Box A_\mu = \Box \sum_\nu a_{\nu\mu} A_\mu = \Box A'_\mu = -\mu_0 \sum_\nu a_{\nu\mu} j_\mu = -\mu_0 j'_\mu. \tag{18.46}$$

18.5 Ebene Wellen

Eine ebene Welle im Vakuum sei beschrieben in einem Inertialsystem Σ durch

$$A_\mu = A_\mu^{(0)} \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)) = A_\mu^{(0)} \exp(i \sum_\lambda k_\lambda x_\lambda) \tag{18.47}$$

mit den Abkürzungen:

$$k_0 = i\frac{\omega}{c}; \quad k_1 = k_x; \quad k_2 = k_y; \quad k_3 = k_z. \tag{18.48}$$

Wegen der Kovarianz der homogenen Wellengleichung

$$\Box A_\mu = 0 \tag{18.49}$$

entsteht aus (18.47) in einem anderen System Σ' wieder eine ebene Welle gemäß (18.18):

$$A'_\mu(x'_\rho) = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu(x_\lambda) = \sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu^{(0)} \exp(i \sum_\lambda k_\lambda x_\lambda) = A'^{(0)}_\nu \exp(i \sum_\lambda k'_\lambda x'_\lambda). \tag{18.50}$$

Die Phase der Welle muß also invariant sein:

$$\sum_\lambda k_\lambda x_\lambda = \sum_\lambda k'_\lambda x'_\lambda \tag{18.51}$$

wie im Fall einer punktförmigen Erregung, deren Wellenfronten in jedem Inertialsystem Kugelflächen sind, die sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzen.

Da (18.51) die Form eines (invarianten) Skalarproduktes hat, sind k_μ die Komponenten eines Vierer-Vektors. Sie transformieren sich unter einer Lorentz-Transformation der Form (18.7) wie:

$$k'_x = \gamma(k_x - \frac{v}{c^2}\omega); \quad k'_y = k_y; \quad k'_z = k_z; \tag{18.52}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - v k_x). \tag{18.53}$$

Benutzt man die Dispersionsrelation

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{\omega'}{k'} \tag{18.54}$$

und bezeichnet man mit ϕ und ϕ' die Winkel, die $\mathbf{k}$ und $\mathbf{k}'$ mit der Richtung von $\mathbf{v}$ (der x-Richtung im Fall von (18.17)) bilden, so wird:

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\phi) \tag{18.55}$$

und

$$\cos\phi' = \frac{k}{k'}\gamma(\cos\phi - \beta) = \frac{\cos\phi - \beta}{1 - \beta\cos\phi}. \tag{18.56}$$

Gleichung (18.55) beschreibt den **Doppler-Effekt**, der außer dem **longitudinalen** Effekt,

$$\omega' = \omega\frac{1 \mp \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \omega(1 \mp \beta) \tag{18.57}$$

für $\beta \ll 1$ und $\phi = 0, \pi$, auch noch einen **transversalen** Effekt beinhaltet,

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{18.58}$$

für $\phi = \pm\pi/2$, der ein typisch relativistisches Phänomen ist. Er wurde (1938) bei der Untersuchung der Strahlung bewegter Wasserstoffatome nachgewiesen. Bekanntestes Beispiel für den longitudinalen Effekt ist die **Rotverschiebung** des Lichts weit entfernter Galaxien, welche zeigt, daß diese Galaxien sich von uns wegbewegen.

18.6 Transformation der Felder E und B

Kennt man $\mathbf{A}$ und Φ, so lassen sich die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{18.59}$$

berechnen. Wir wollen nun (18.59) auf die Koordinaten x_μ und die Komponenten des Vierer-Potentials A_μ umschreiben. Es wird z. B.:

$$\frac{i}{c}E_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x_0} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1}; \quad B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}. \tag{18.60}$$

Gleichung (18.60) legt nahe, folgende antisymmetrische 4×4 Matrix einzuführen:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{18.61}$$

Sie hat genau 6 unabhängige Elemente, für die man gemäß (18.59), (18.60) findet:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 \\ -\frac{i}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{i}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{i}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18.62}$$

Die Matrix (18.61) ist ein Lorentz-Tensor 2. Stufe, denn:

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}\{\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho}\} = \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}F_{\lambda\rho}. \tag{18.63}$$

Damit kennen wir auch das Transformationsverhalten der Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$. Für die spezielle Transformation (18.7) findet man aus (18.63) und (18.62)

$$E'_x = E_x; \quad B'_x = B_x; \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z); \quad B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z); \tag{18.64}$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y); \quad B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y).$$

Allgemein gilt, daß die Parallel-Komponenten (zur Richtung von $\mathbf{v}$) erhalten bleiben:

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel; \quad \mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel, \tag{18.65}$$

während die Transversal-Komponenten sich ändern gemäß :

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})); \quad \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E})). \tag{18.66}$$

Die Umkehrung

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}')); \quad \mathbf{B}_\perp = \gamma(\mathbf{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}')) \tag{18.67}$$

erhält man analog dem Fall der Koordinatentransformationen. Die Gleichungen (18.66), (18.67) zeigen die zwangsläufige Verknüpfung der Felder **E** und **B** zum **elektromagnetischen Feld** (vgl. Kap. 0.4).

18.7 Das Coulomb-Feld

Das Feld einer in Σ' ruhenden Punktladung q ist:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}'}{r'^3}; \quad \mathbf{B}'(\mathbf{r}') = 0. \tag{18.68}$$

Nach (18.65), (18.67) wird daraus in einem gegenüber Σ' mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ bewegten System Σ:

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x - vt)}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \tag{18.69}$$

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma y}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

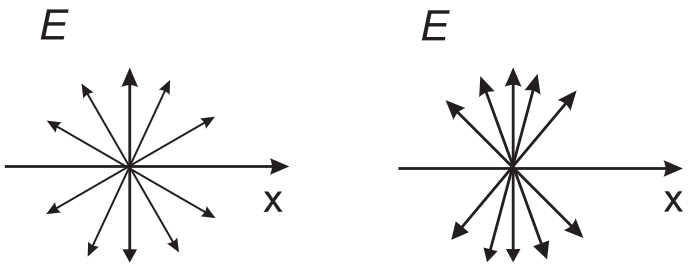
Dabei wurden x', y', z' explizit nach Lorentz-Transformation als Funktion von x, y, z geschrieben. Das Feld erscheint in Σ wie in Σ' als Zentralfeld; in Σ ist es jedoch nicht mehr isotrop, da der Faktor γ^2 unter der Wurzel in (18.69) die x-Richtung gegenüber der y- und z-Richtung auszeichnet. Nach (18.67) sieht der Beobachter in Σ ein Magnetfeld:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \tag{18.70}$$

da sich für ihn die Ladung q bewegt, also einen Strom repräsentiert. Zur Veranschaulichung von (18.69) und (18.70) betrachten wir den Grenzfall $\gamma \gg 1$:
i) Nahe der x-Achse ($y, z \approx 0; x - vt \neq 0$) wird

$$E_x \approx \frac{1}{\gamma^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x - vt)^2}, \tag{18.71}$$

was gegenüber dem statischen Feld eine Reduktion der Feldstärke um den Faktor γ^{-2} bedeutet.



ii) In der zur $y-z$-Ebene parallelen Ebene durch q wird:

$$E_y = \frac{\gamma y}{(y^2+z^2)^{3/2}}; \qquad E_z = \frac{\gamma z}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \tag{18.72}$$

was gegenüber dem statischen Feld eine Verstärkung um den Faktor γ bedeutet. Die (radial gerichteten) Feldlinien sind also im Vergleich zum statischen Feld in Bewegungsrichtung **verdünnt**, senkrecht dazu **verdichtet**.

Für $\gamma \to \infty$ (ultra-relativistischer Fall) wird $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, so daß mit (18.70) die Feldlinien des $\mathbf{B}$-Feldes konzentrisch um q in der $y-z$-Ebene verlaufen.

Zusammenfassung:
Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind kovariant bzgl. Lorentz-Transformationen, haben also in jedem Inertialsystem die gleiche Form. Sie genügen damit dem Einstein'schen Relativitätsprinzip.

Kapitel 19

Relativistische Mechanik

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind invariant unter Galilei- Transformationen, nicht jedoch unter Lorentz-Transformationen. Das Relativitätsprinzip verlangt daher eine Modifikation der Newton'schen Gleichungen, und zwar derart, daß bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ die Newton'schen Gleichungen gültig bleiben.

19.1 Impuls und Energie

Wir betrachten zunächst ein freies Teilchen. Seinen Newton'schen Impuls

$$\mathbf{p} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{19.1}$$

erweitern wir zu einem Vierer-Impuls, dessen Komponenten gegeben sind durch

$$p_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau}, \tag{19.2}$$

wobei τ die Eigenzeit des Teilchens in seinem Ruhsystem ist, m_0 die Ruhmasse. Die Eigenzeit τ hängt mit der Zeit t im System Σ, auf das sich die Koordinaten x_μ beziehen, wie folgt zusammen:

$$t = \gamma\tau; \quad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = \gamma(v). \tag{19.3}$$

Für $v \ll c$ wird $\gamma \to 1$ und die räumlichen Komponenten von (19.2) gehen in (19.1) über. Zur Deutung der *ad hoc* eingeführten 0. Komponente in (19.2),

$$p_0 = m_0 \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{i}{c} m_0 \gamma c^2 \tag{19.4}$$

beachten wir, daß die p_μ einen Vierer-Vektor bilden, da m_0 und τ Invarianten sind. Die **Länge** eines Vierer-Vektors ist jedoch nach Kap. 18 eine Lorentz-Invariante:

$$\sum_\mu p_\mu^2 = \text{const} = -m_0^2 c^2, \tag{19.5}$$

wobei man die rechte Seite von (19.5) wie folgt erhält: Für die räumlichen Komponenten ist

$$p^2 = \sum_i p_i^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2, \tag{19.6}$$

wobei v der Betrag der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ des Teilchens ist. Weiter ist

$$p_0^2 = -m_0^2 \gamma^2 c^2, \tag{19.7}$$

so daß in der Tat

$$\sum_\mu p_\mu^2 = m_0^2 c^2 (\gamma^2 \beta^2 - \gamma^2) = -m_0^2 c^2. \tag{19.8}$$

Zur Deutung von p_0 entwickeln wir $\gamma(v)$ für $v \ll c$:

$$m_0 c^2 \gamma = m_0 c^2 (1 + \frac{\beta^2}{2} \cdots) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots \tag{19.9}$$

Da der 2. Term rechts gerade die nichtrelativistische (kinetische) Energie des Teilchens ist, liegt es nahe

$$\epsilon = m_0 \gamma(v) c^2 = m(v) c^2 \tag{19.10}$$

als Energie des freien Teilchens zu deuten, den Anteil

$$\epsilon_0 = m_0 c^2 \tag{19.11}$$

als seine **Ruhenergie**. Es ist dann

$$T = \epsilon - \epsilon_0 \tag{19.12}$$

seine relativistische kinetische Energie. Gleichung (19.8) kann dann als relativistische Energie-Impuls-Beziehung geschrieben werden:

$$\epsilon^2 = c^2 (p^2 + m_0^2 c^2) \tag{19.13}$$

und der Vierer-Vektor (19.2) hat die Komponenten

$$(\frac{i}{c}\epsilon, p_1, p_2, p_3). \tag{19.14}$$

Die in (19.10) behauptete **Äquivalenz von Energie und Masse** ist durch eine Vielfalt von Experimenten bestätigt worden. Wir geben hier einige repräsentative Beispiele:

1.) Bindungsenergien von Atomen und Kernen

Für das Deuteron entspricht die Massendifferenz

$$\Delta m = m_p + m_n - m_d \approx 3.5 \cdot 10^{-27} g \tag{19.15}$$

einer Energie

$$\epsilon_d = \Delta m \; c^2 \approx 2.2 MeV, \tag{19.16}$$

welche gerade die Bindungsenergie des Deuterons ist. In Atomen ist die Bindungsenergie um Größenordnungen geringer: aus

$$m_p + m_e - m_H \approx 2.4 \cdot 10^{-32} g \tag{19.17}$$

folgt für die Bindungsenergie

$$\epsilon_H \approx 13.5 eV. \tag{19.18}$$

2.) Energieerzeugung in Sternen

Eine der wesentlichen Reaktionen der Energieerzeugung in Sternen ist die **Verbrennung** von Wasserstoff (H) zu Helium (^4He). Dabei werden pro Elementarprozeß entsprechend der Massenbilanz

$$4m_p + 2m_e - m_{^4He} \approx 0.5 \cdot 10^{-25} g \tag{19.19}$$

etwa 25 MeV frei.

3.) Paar-Erzeugung und Vernichtung

Bei der Kollision von Elektronen mit Positronen können hochenergetische γ-Quanten entstehen,

$$e^+ + e^- \to 2\gamma, \tag{19.20}$$

wobei die Enrgie-Impuls-Bilanz das Auftreten von 2 γ-Quanten erfordert. Umgekehrt kann ein γ-Quant (1.02 MeV $\approx 2m_e c^2$) in ein Elektron-Positron-Paar übergehen,

$$\gamma \to e^+ + e^-, \tag{19.21}$$

wenn ein weiteres Teilchen (z.B. ein Atomkern) für den Impulsausgleich sorgt.

Das Newton'sche Trägheitsgesetz, wonach

$$\mathbf{p} = \text{const} \tag{19.22}$$

für ein freies Teilchen gilt, verallgemeinern wir auf

$$p_\mu = \text{const}; \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{19.23}$$

fordern also zugleich mit der Erhaltung der räumlichen Komponenten auch die Konstanz der 0. Komponente, der Energie ϵ.

Die Verallgemeinerung (19.23) von (19.22) folgt zwingend aus dem Transformationsverhalten der p_μ. Da sie die Komponenten eines Vierer-Vektors sind, gilt bei einer Lorentz-Transformation:

$$\epsilon = \gamma(v)(\epsilon' + v p'_x); \quad p_x = \gamma(v)(p'_x + \frac{v}{c^2}\epsilon'); \quad p_y = p'_y; \quad p_z = p'_z. \tag{19.24}$$

Die Vermischung von Raum- und Zeit-Komponenten führt also dazu, daß Impuls- und Energie-Erhaltung nur simultan möglich sind.

Das Ruhsystem eines Teilchens (Σ') definieren wir durch:

$$\epsilon' = m_0 c^2; \quad p'_x = p'_y = p'_z = 0, \tag{19.25}$$

dann gilt nach (19.24) in einem anderen Inertialsystem Σ:

$$\epsilon = \gamma(v)\epsilon' = m_0\gamma c^2 = m(v)c^2; \quad p_x = \gamma(v)\frac{v}{c^2}\epsilon' = m(v)v; \quad p_y = p_z = 0. \tag{19.26}$$

Bemerkung:
Für Teilchen mit $m_0 = 0$ wie ein Photon ist ein Ruhsystem nicht definierbar, da dann nach (19.25), (19.26) in jedem Inertialsystem $p_\mu = 0$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ wäre und man nicht sinnvoll von einem **Teilchen** sprechen könnte.

19.2 Stoßprobleme

Zur relativistischen Beschreibung von Stoßprozessen definieren wir Energie und Impuls für N Teilchen:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i; \quad \epsilon = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i, \tag{19.27}$$

wobei $\mathbf{p}_i$ die räumlichen Komponenten des relativen Impulses von Teilchen i, ϵ_i seine Energie gemäß (19.10 ist.

Wir betrachten den Stoß zweier Teilchen

$$1 + 2 \to 3 + 4, \tag{19.28}$$

wobei $1, 2$ die Teilchen vor dem Stoß , $3, 4$ nach dem Stoß bezeichnen möge. Da asymptotisch (vor und nach dem Stoß) freie Teilchen vorliegen, muß die Impulserhaltung gelten:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 = 0. \tag{19.29}$$

Wenn aber die 3 räumlichen Komponenten eines Vierer-Vektors verschwinden, so muß nach (19.24) auch die 0. Komponente verschwinden,

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 = 0, \tag{19.30}$$

also Energieerhaltung gelten, damit die Aussage der Impulserhaltung in jedem Inertialsystem gilt. Energie- und Impulssatz können als Lorentz-invariante Aussagen nur simultan gelten!

Beispiel: Compton-Effekt

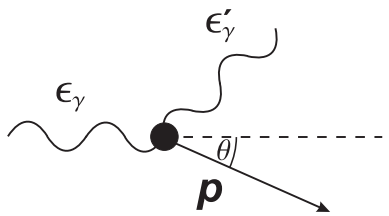
Wir untersuchen die Streuung eines Photons an einem freien, anfangs ruhenden Elektron. Die Energie des Photons hängt mit der Frequenz der Lichtwelle zusammen gemäß

$$\epsilon_\gamma = \hbar\omega, \tag{19.31}$$

wobei $\hbar \approx 197$ MeV fm/c die Planck'sche Konstante ist. Dann folgt für den Impulsbetrag nach (19.13)

$$p_\gamma = \frac{\epsilon_\gamma}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k, \tag{19.32}$$

da das Photon keine Ruhemasse hat.



Nach Energie- und Impulssatz gilt dann:

$$\mathbf{P} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{19.33}$$

und

$$c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 = \hbar(\omega - \omega') \tag{19.34}$$

für die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß . Wir quadrieren beide Gleichungen

$$P^2 = \hbar^2(k^2 - 2kk'\cos\theta + k'^2), \tag{19.35}$$

sowie

$$P^2 + m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 + \hbar^2(k - k')^2 + 2m_0\hbar c(k - k'), \tag{19.36}$$

und bilden die Differenz:

$$(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k}) = \frac{\hbar}{m_0 c}(1 - \cos\theta). \tag{19.37}$$

Wir erhalten die Änderung der Wellenzahl des Lichts in Abhängigkeit von Streuwinkel θ. Die experimentelle Bestätigung von (19.37) ist eine wichtige Stütze für die Beschreibung einer Lichtwelle durch **Photonen**, masselose Teilchen, deren Energie und Impuls durch (19.31), (19.32) definiert sind.

19.3 Bewegungsgleichungen

In Verallgemeinerung der Newton'schen Kraft-Definition führen wir im Minkowski-Raum eine Vierer-Kraft ein durch ihre Komponenten:

$$\mathcal{K}_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \gamma(v)\frac{dp_\mu}{dt}. \tag{19.38}$$

Dabei ist $d\tau$ im **momentanen** Ruhsystem des Teilchens als **differenzielle** Eigenzeit erklärt. Die Raum-Komponenten von (19.38) ergeben die relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma^{-1}\vec{\mathcal{K}} = \mathbf{K}, \tag{19.39}$$

wobei $\mathbf{K}$ z. B. für die Lorentz-Kraft (6.32) steht. Mit (19.6) können wir auch schreiben:

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma(v)\mathbf{v}) = \mathbf{K}, \tag{19.40}$$

woraus für $v \ll c$, $\gamma \to 1$ gerade die nichtrelativistische Bewegungsgleichung entsteht:

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m_0 \mathbf{b} = \mathbf{K}. \tag{19.41}$$

Gleichung (19.40) hat zwei **Interpretationsmöglichkeiten**:
i) Man behält die nichtrelativistische Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bei und akzeptiert eine geschwindigkeitsabhängige Masse,

$$\frac{d}{dt}(m(v)\mathbf{v}) = \mathbf{K}, \tag{19.42}$$

mit

$$m(v) = \gamma(v)\ m_0, \tag{19.43}$$

oder
ii) man arbeitet stets mit der Ruhmasse m_0, einer Lorentz-invarianten Größe, und modifiziert die Definition der Geschwindigkeit:

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{K} \tag{19.44}$$

mit der modifizierten Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \gamma(v)\ \mathbf{v}. \tag{19.45}$$

Die Gleichungen (19.42) und (19.43) zeigen, daß Teilchen der Ruhemasse $m_0 \neq 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ nicht erreichen können, da wegen

$$m(v) \to \infty \tag{19.46}$$

für $v \to c$ dazu eine ∞-große Energie nötig wäre.

Zur Diskussion der Komponente $\mathcal{K}_0$ benutzen wir:

$$\sum_\mu \mathcal{K}_\mu p_\mu = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(\sum_\mu p_\mu^2) = 0 \tag{19.47}$$

wegen (19.5), woraus

$$\sum_{i=1}^{3} \mathcal{K}_i p_i = -\mathcal{K}_0 p_0 \tag{19.48}$$

oder mit (19.2), (19.4)

$$\mathcal{K}_0 = \frac{i}{c}\vec{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{v} = \frac{i}{c}\gamma(v)\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}. \tag{19.49}$$

Da $\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$ die von der Kraft $\mathbf{K}$ am Teilchen pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist, können wir auch schreiben

$$\mathcal{K}_0 = \frac{i}{c}\gamma(v)\frac{d\epsilon}{dt} \tag{19.50}$$

oder

$$K_0 = \gamma(v)^{-1}\mathcal{K}_0 = \frac{i}{c}\frac{d\epsilon}{dt} \tag{19.51}$$

wie nach (19.14) zu erwarten war. Die Gleichungen (19.49) und (19.50) bestätigen noch einmal unsere Vorstellung von der **Äquivalenz von Energie und Masse**.

19.4 Lorentz-Transformation der Kraft

Da $\mathcal{K}_\mu$ die Komponenten eines Vierer-Vektors sind, gilt für die Transformation vom momentanen Ruhsystem Σ auf ein anderes Inertialsystem Σ' mit der speziellen Transformation (18.7):

$$\mathcal{K}_1' = \gamma(v)(\mathcal{K}_1 + \frac{i}{c}\mathcal{K}_0) = \gamma(v)\mathcal{K}_1; \quad \mathcal{K}_2' = \mathcal{K}_2; \quad \mathcal{K}_3' = \mathcal{K}_3, \tag{19.52}$$

da in Σ als momentanem Ruhsystem $\mathcal{K}_0 = 0$ gemäß (19.49) ist. Kurz formuliert:

$$\vec{\mathcal{K}}_\perp' = \vec{\mathcal{K}}_\perp; \quad \vec{\mathcal{K}}_\parallel' = \gamma(v)\ \vec{\mathcal{K}}_\parallel. \tag{19.53}$$

Wegen (19.39) gilt dann umgekehrt

$$\mathbf{K}_\perp' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\ \mathbf{K}_\perp; \quad \mathbf{K}_\parallel' = \mathbf{K}_\parallel, \tag{19.54}$$

da im momentanen Ruhsystem Σ gilt

$$\gamma(v) = \gamma(0) = 1. \tag{19.55}$$

19.5 Lorentz-Kraft

Wir wollen nun prüfen, ob die für die Praxis äußerst wichtige Lorentz-Kraft der Forderung der Kovarianz genügt, ob also

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) = \mathbf{K} \tag{19.56}$$

in jedem Inertialsystem als Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Masse m_0, Impuls $m_0(v)\,\mathbf{v}$ benutzt werden darf. Wir ergänzen dazu (19.56) im Hinblick auf (19.51) durch

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \tag{19.57}$$

und schreiben (19.56), (19.57) auf den Vierer-Formalismus um:

$$\frac{dp_\mu}{dt} = q \sum_\nu F_{\mu\nu} v_\nu \tag{19.58}$$

mit $F_{\mu\nu}$ aus (18.62) und

$$(v_\nu) = (\frac{dx_\nu}{dt}) = (ic, \mathbf{v}). \tag{19.59}$$

Gleichung (19.58) ist noch nicht in kovarianter Form. Dies erreicht man aber durch Multiplikation mit $\gamma(v)$:

$$\gamma\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{q}{m_0} \sum_\nu F_{\mu\nu} p_\nu. \tag{19.60}$$

Die Größen q, m_0, τ sind Lorentz-invariant, der Rest transformiert sich auf beiden Seiten wie Vierer-Vektoren, denn einerseits ist:

$$\frac{dp'_\mu}{d\tau} = \sum_\rho a_{\mu\rho} \frac{dp_\rho}{d\tau}, \tag{19.61}$$

andererseits:

$$\sum_\nu F'_{\mu\nu} p'_\nu = \sum_{\rho,\lambda,\sigma} a_{\mu\rho} (\sum_\nu a_{\nu\lambda} a_{\nu\sigma}) F_{\rho\lambda} p_\sigma \tag{19.62}$$

$$= \sum_{\rho,\lambda,\sigma} a_{\mu\rho} \delta_{\lambda\sigma} F_{\rho\lambda} p_\sigma = \sum_{\rho,\sigma} a_{\mu\rho} F_{\rho\sigma} p_\sigma = \sum_\rho a_{\mu\rho} \sum_\sigma F_{\rho\sigma} p_\sigma .$$

Ergebnis:
Wir haben die Grundbegriffe und Grundgleichungen der Newton'schen Mechanik für die relativistische Mechanik erweitert derart, daß
i) die Newton'sche Mechanik im Grenzfall $v \ll c$ enthalten ist,
ii) die modifizierten Grundgleichungen kovariant bzgl. Lorentz-Transformationen sind.

Dabei blieb die Lorentz-Kraft (19.56) als Bindeglied zwischen Mechanik und Elektrodynamik erhalten. Sie findet ihre experimentelle Bestätigung z. B. im *Funktionieren* moderner Teilchenbeschleuniger. Der Zusammenhang zwischen relativistischer Mechanik und Elektrodynamik ergibt sich zwangsläufig im Rahmen von relativistischen **Eichfeldtheorien** mit **minimaler Kopplung**.